

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
CELSO SUCKOW DA FONSECA - CEFET/RJ**

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E PROJETO DE
ABSORVEDORES PASSIVOS DE VIBRAÇÕES
EM PONTES**

Gustavo Winter Silva

Lucas Biato de Oliveira

Prof^o Orientador: Fernando Ribeiro da Silva

**RIO DE JANEIRO
DEZEMBRO/2015**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
CELSO SUCKOW DA FONSECA - CEFET/RJ**

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E PROJETO DE
ABSORVEDORES PASSIVOS DE VIBRAÇÕES
EM PONTES**

Gustavo Winter Silva

Lucas Biato de Oliveira

Projeto final apresentado em cumprimento às
normas do Departamento de Educação Superior
do CEFET/RJ, como parte dos requisitos para obtenção
do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Prof^o Orientador: Fernando Ribeiro da Silva

**RIO DE JANEIRO
DEZEMBRO/2015**

S586 Silva, Gustavo Winter
Modelagem, simulação e projeto de absorvedores passivos de vibrações em pontes / Gustavo Winter Silva [e] Lucas Biato de Oliveira.—2015.
58f. + apêndices : il. (algumas color.) , grafs. , tabs. ; enc.

Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca , 2015.
Bibliografia : f.56-58
Orientador : Fernando Ribeiro da Silva

1. Engenharia mecânica. 2. Vibração. 3. Pontes. 4. Absorvedor dinâmico. I. Oliveira, Lucas Biato de. II. Silva, Fernando Ribeiro da (Orient.). III. Título.

CDD 620.1

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Fernando, pelo tempo, paciência, orientação que nos foi dada, todo o entendimento que nos foi passado e pela grande amizade

Aos professores que ministraram o curso Engenharia Mecânica, pelo conhecimento transmitido em todo esse período de graduação.

Ao CEFET-RJ, pela oportunidade que nos foi concedida por estudar em uma instituição de respeito, com excelentes professores, nos proporcionando espaço físico e ferramentas necessárias para a nossa formação.

Às nossas famílias, pelo constante apoio nas horas mais difíceis de toda a nossa vida acadêmica, e pelos inúmeros incentivos de sempre persistir diante de uma dificuldade.

Também ao engenheiro mecânico Diogo Bandeira de Melo Castelo Branco pelo apoio e suporte dado na execução e no entendimento desse projeto.

RESUMO

O objetivo desse projeto é o estudo do comportamento de uma ponte rodoviária com a interação de um veículo de passeio trafegando sobre a mesma, assim como sua análise com a adição de absorvedores dinâmicos de vibração, para verificar o quanto da vibração da ponte é absorvida. Com o auxílio de um software de cálculo numérico (MatLab) é possível criar rotinas de programação para os modelos dos veículos e para a ponte. Com a criação desses modelos numéricos e a análise visando o correto funcionamento, eles são unidos formando uma rotina única, um conjunto veículo-ponte. Posterior a criação dessa rotina única é introduzido o absorvedor dinâmico a estrutura da ponte para assim poder analisar os resultados e chegar a conclusão dos melhores parâmetros para o projeto do absorvedor.

PALAVRAS CHAVES: Veículo-ponte, absorvedor dinâmico, vibrações em pontes, absorvedores passivos.

ABSTRACT

The objective of this project is to study the behavior of a road bridge with the interaction of a vehicle traveling over the same, as well as its analysis with the addition of dynamic vibration absorbers, in order to verify how much of the bridge vibration is absorbed. With the aid of a numerical calculation software (MatLab) it's possible to create programming routines for models of the vehicles and the bridge. With the development of these numerical models and the analysis aimed the correct operation, they are united into a single routine, a vehicle bridge together. Further the creation of this single routine it's necessary to introduce the dynamic absorber at the bridge structure so that it could analyze the results and come to the conclusion of the best parameters for the absorber design.

KEYWORDS: Vehicle-bridge, dynamic absorber, vibration in bridges, passive absorbers.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação do trabalho.....	1
1.2. Objetivo do trabalho.....	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
2.1. Absorvedor dinâmico.....	2
2.2. Ponte	3
2.3. Vibrações mecânicas.....	6
2.4. Amortecimento.....	7
2.5. Conjunto massa-mola.....	8
2.6. Graus de liberdade	9
2.6.1. Um grau de liberdade	9
2.6.2. Dois graus de liberdade	10
3. ANÁLISES MATEMÁTICAS	11
3.1. Modelo de um quarto de carro	12
3.2. Modelo de meio carro	15
3.3. Modelo da estrutura da ponte.....	18
3.3.1. Deslocamento transversal.....	19
3.3.2. Relação deformação – deslocamento	22
3.3.3. Matriz rigidez	22
3.3.4. Matriz massa	24
3.3.5. Amortecimento da estrutura	25
3.3.6. Forçamento	25
4. RESULTADOS DOS MODELOS ISOLADOS	26
4.1. Um quarto de carro	26
4.2. Meio carro.....	27
4.3. Ponte	28
5. ACOPLAMENTO DOS MODELOS VEÍCULO-PONTE	30
5.1. Análise de vibração da ponte interagindo com o modelo de um quarto de carro	30
5.2. Análise de vibração da ponte com o modelo de meio carro passante.	32
6. INTRODUÇÃO DO ABSORVEDOR DINÂMICO NO SISTEMA VEÍCULO-PONTE	34
6.1. Análise da vibração da ponte com um absorvedor dinâmico.....	35
6.1.1. Com um quarto de carro passante (várias velocidades)	35
6.1.2. Com meio carro passante	37
6.2. Análise da vibração da ponte com três absorvedores dinâmicos	39
6.2.1. Com um quarto de carro passante	40
6.2.2. Com meio carro passante	41
7. PROJETO DO ABSORVEDOR DINÂMICO	44
7.1. Definição dos parâmetros.....	44
7.2. Projeto da mola	44
7.3. Projeto da massa.....	49
7.4. Projeto da estrutura	49
8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	53
8.1. Conclusões	53
8.2. Sugestões para trabalhos futuros	54
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56
APÊNDICE I: Rotina para solução do modelo de um quarto de carro.	59

APÊNDICE II: Rotina para solução do modelo de meio carro.	60
APÊNDICE III: Rotina para solução do modelo da ponte.	63
APÊNDICE IV: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{4}$ de carro.....	66
APÊNDICE V: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{2}$ de carro.	71
APÊNDICE VI: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{4}$ de carro e implementação de um absorvedor dinâmico.....	77
APÊNDICE VII: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{2}$ de carro e implementação de um absorvedor dinâmico.....	83
APÊNDICE VIII: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{4}$ de carro e implementação de três absorvedores dinâmicos.	90
APÊNDICE IX: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{2}$ de carro e implementação de três absorvedores dinâmicos.	96

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1: Efeito de um absorvedor dinâmico	3
Figura 2. 2: Exemplo de amortecimento.	8
Figura 2. 3: Conjunto massa mola.....	9
Figura 2. 4: Um grau de liberdade	9
Figura 2. 5: Dois graus de liberdade.	10
Figura 3. 1: Modelo de $\frac{1}{4}$ de carro	12
Figura 3. 2: DCL de um quarto de carro.	13
Figura 3. 3: Representação de meio carro	15
Figura 3. 4: DCL meio carro	15
Figura 3. 5: Representação de uma ponte com 7 nós	19
Figura 3. 6: DCL entre 2 nós.....	20
Figura 3. 7: Forças e momentos entre 2 nós.....	23
Figura 3. 8: Forças de cisalhamento e de flexão	23
Figura 3. 9: Força passante e reação da ponte.....	25
Figura 4. 1: Força vertical de massa.....	26
Figura 4. 2: Deslocamento do pneu no solo	27
Figura 4. 3: Deslocamento do GG e variação θ $\frac{1}{2}$ carro.....	27
Figura 4. 4: Deslocamento dos pneus	28
Figura 4. 5: Força nos pneus.	28
Figura 4. 6: Deslocamento x tempo ponte.....	29
Figura 5. 1: Modelo simplificado da ponte com um quarto de carro	30
Figura 5. 2: Deslocamento do carro com velocidade de 15 Km/h	31
Figura 5. 3: Deslocamento no vão central da ponte com velocidade de 15km/h	32
Figura 5. 4: Modelo simplificado da ponte com meio carro	32
Figura 5. 5: Deslocamento do centro da ponte com uma velocidade de 15km/h.....	33
Figura 5. 6: Deslocamento do carro com uma velocidade de 15km/h	33
Figura 5. 7: Deslocamento das rodas do carro com uma velocidade de 15km/h	33
Figura 6. 1: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor com um quarto de carro passante e um absorvedor. $k=11000, m=3000, v=60$	36
Figura 6. 2: Deslocamento do carro e da roda com um quarto de carro passante e um absorvedor $k=11000, m=3000, v=60$	36
Figura 6. 3: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor com meio carro passante e um absorvedor, $k=11000, m=3000, v=40$	37
Figura 6. 4: Deslocamento do carro e da roda com meio carro passante e um absorvedor, $k=11000, m=3000, v=40$	38
Figura 6. 5: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor, com um quarto de carro passante e três absorvedores, $k=6000, m=1500, v=80$	40
Figura 6. 6: Deslocamento do carro e da roda, com um quarto de carro passante e três absorvedores, $k=6000, m=1500, v=80$	40
Figura 6. 7: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor, com meio carro passante e três absorvedores, $k=6000, m=1500, v=80$	42
Figura 6. 8: Deslocamento do carro e da roda, de meio carro passante e com três absorvedores, $k=6000, m=1500, v=80$	42
Figura 7. 1: Parâmetros da mola	45
Figura 7. 2: Escolha do gancho da mola	47
Figura 7. 3: Escolha do olhal.....	48
Figura 7. 4: Desenho da massa com os olhais 264 x 482 x 1500 mm.....	49

Figura 7. 5: Desenho da massa com os olhais.....	49
Figura 7. 6: Representação da viga em “I”.....	50
Figura 7. 7: Conexão viga em “I”-Ponte.....	50
Figura 7. 8: Representação da viga em “U”.....	51
Figura 7. 9: Conexão vigas “I”-“U”.....	51
Figura 7. 10: Absorvedor – Ponte, vista frontal.....	52
Figura 7. 11: Vista em corte da perspectiva Absorvedor-Ponte.....	52
Figura 7. 12: Vista em perspectiva, absorvedores-Ponte.....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 3. 1: Valores utilizados para um quarto de carro	13
Tabela 3. 2: Valores utilizados para meio carro	16
Tabela 3. 3: Valores utilizados para o cálculo da ponte	19
Tabela 6. 1: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 40km/h, com um absorvedor.....	36
Tabela 6. 2: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 60km/h, com um absorvedor.....	37
Tabela 6. 3: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 80km/h, com um absorvedor.....	37
Tabela 6. 4: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 40km/h, com um absorvedor.....	38
Tabela 6. 5: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 60km/h, com um absorvedor.....	38
Tabela 6. 6: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 80km/h, com um absorvedor.....	39
Tabela 6. 7: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 40km/h, com três absorvedores	41
Tabela 6. 8: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 60km/h, com três absorvedores	41
Tabela 6. 9: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 80km/h, com três absorvedores	41
Tabela 6. 10: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 40km/h, com três absorvedores	42
Tabela 6. 11: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 60km/h, com três absorvedores	43
Tabela 6. 12: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 80km/h, com três absorvedores	43
Tabela 7. 1: Deslocamento estático.....	44

LISTA DE SIGLAS

DCL- Diagrama de corpo livre

GDL- Grau de liberdade

CM- Centro de massa

LISTA DE SIMBOLOS

A - Área transversal da ponte

c - Coeficiente de amortecimento do veículo

c_1 - Coeficiente de amortecimento do veículo

c_2 - Coeficiente de amortecimento do veículo

C_m - Razão entre o diâmetro do arame e da espira

d - Distância entre o eixo veículo e o centro de massa (CM)

D - Diâmetro da espira

d_1 - Distância do pneu dianteira para o centro de massa

d_2 - Distância do pneu traseira para o centro de massa

E - Módulo de elasticidade

f_{y1} - Força nodal

f_{y2} - Força nodal

g - Aceleração gravitacional

G - Módulo de rigidez

I - Momento de inércia

J - Momento polar de inércia

K - Coeficiente de rigidez da ponte

k - Coeficiente de rigidez do veículo

k_1 - Coeficiente de rigidez do veículo

k_2 - Coeficiente de rigidez do veículo

k_p - Coeficiente de rigidez do pneu

k_{p1} - Coeficiente de rigidez do pneu

k_{p2} - Coeficiente de rigidez do pneu

k_w - Fator Wahl

L - Distância entre nós

L_e - Deslocamento estático

M - Massa da ponte

m - Massa do veículo

m_1 - Massa do veículo

m_2 - Massa do pneu

m_a - Massa do absorvedor dinâmico de vibrações

m_{p1} - Massa do pneu

m_{p2} - Massa do pneu

N - Número de espiras

r - Raio

r_0 - Densidade

u - Deslocamentos horizontais da ponte

u_a - Deslocamentos horizontais do absorvedor dinâmico de vibração

v - Velocidade horizontal do veículo

x - Deslocamento vertical do veículo

x_1 - Deslocamento vertical do veículo

x_2 - Deslocamento vertical do veículo

\dot{x} - Velocidade vertical do veículo

\dot{x}_1 - Velocidade vertical do veículo

\dot{x}_2 - Velocidade vertical do veículo

\dot{x}_p - Velocidade vertical do pneu

\dot{x}_{p1} - Velocidade vertical do pneu

\dot{x}_{p2} - Velocidade vertical do pneu

\ddot{x} - Aceleração vertical do veículo

\ddot{x}_1 - Aceleração vertical do veículo

\ddot{x}_2 - Aceleração vertical do veículo

\ddot{x}_p - Aceleração vertical do veículo

\ddot{x}_{p1} - Aceleração vertical do pneu

\ddot{x}_{p2} - Aceleração vertical do pneu

x_1 - Excitação de base na pneu do veículo

x_{r1} - Excitação de base no pneu do veículo

x_{r2} - Excitação de base no pneu do veículo

y_1 - Deslocamento vertical da ponte

y_2 - Deslocamento vertical da ponte

θ - Deslocamento angular do veículo

θ_1 - Deslocamento angular da ponte

θ_2 - Deslocamento angular da ponte

$\dot{\theta}$ - Velocidade angular do veículo

$\ddot{\theta}$ - Aceleração angular do veículo

ρ - Massa específica

σ - Tensão normal

τ - Tensão cisalhante

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação do trabalho

A motivação desse trabalho surgiu a partir do estudo e da curiosidade sobre vibrações mecânicas e os métodos de amortecimento e diminuição dos efeitos causados pela vibração em um determinado corpo. Idealizou-se assim, um projeto de absorvedores dinâmicos que tem vital importância nos projetos de vigas e pontes. A motivação foi também a necessidade de entender-se, da forma mais realista possível as reações que uma ponte sofre quando são submetidas as condições normais de uso.

1.2. Objetivo do trabalho

O trabalho aqui desenvolvido tem como objetivo, primeiramente adquirir o conhecimento do efeito da vibração mecânica em um vão de uma ponte ou viaduto, induzido pela passagem de $\frac{1}{4}$ de veículo com 2 graus de liberdade, e $\frac{1}{2}$ veículo com 4 graus de liberdade. Para isso será realizado um estudo analítico do vão da ponte, do $\frac{1}{4}$ de veículo e $\frac{1}{2}$ veículo, equacionando-os para posteriormente a esse estudo, realizar uma modelagem numérica utilizando o software MatLab.

Após a obtenção dos resultados com cada componente separado, eles serão unidos numericamente (Ponte + $\frac{1}{4}$ de veículo, ponte + $\frac{1}{2}$ veículo) e com isso se terá o comportamento da ponte com o veículo passando e ocorrendo a excitação da mesma.

Com esses dados vai ser possível iniciar o projeto do absorvedor dinâmico, constituído do estudo analítico, o equacionamento, a modelagem numérica e a análise dos resultados obtidos com ele fixado no corpo da ponte. Será estudada a diferença da vibração da ponte sem absorvedor, com 1 absorvedor e com 3 absorvedores.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Absorvedor dinâmico

Absorvedor dinâmico é um sistema com parâmetros de massa, rigidez e amortecimentos fixos com o objetivo de reduzir a níveis seguros, a tolerância de movimentos de vibrações de estruturas esbeltas sujeitas a vibrações e oscilações de grande curso.

Sua estrutura é composta por uma massa relativamente pequena elasticamente conectada à estrutura principal, esse sistema deve ser projetado com a finalidade de remover picos de ressonância da frequência natural original. O absorvedor ainda introduz dois novos picos tornando o sistema original, no caso de um grau de liberdade, em um sistema dinâmico de dois graus de liberdade, que correspondem às frequências naturais do sistema acoplado.

Resumindo, o absorvedor dinâmico adiciona um grau de liberdade ao sistema. Ele possui uma massa e mola auxiliares que são adicionados em série ao sistema principal.

Tanto a massa quanto a mola, devem ser escolhidos de tal maneira que a frequência natural do absorvedor seja igual à frequência da excitação. Podem ser confundidos com absorvedores de massa sintonizada, porém, a diferença é que os absorvedores dinâmicos são dotados do amortecimento viscoso em grau específico, e podem atuar em uma grande faixa de frequência, e não apenas em uma única.

Eles são muito eficazes tanto em situações onde existe excitação bem definida e constante, quanto naquelas onde a excitação é variável e imprevisível.

A quantidade de absorvedores dinâmicos em uma estrutura fazem total diferença na absorção da vibração de um sistema, é nesse ponto que se baseia o projeto. Neste trabalho será estudado como uma ponte se comporta sem a presença desses mecanismos, e depois será feita a comparação da vibração quando é inserido um ou mais absorvedores.

Existe um caso prático muito similar ao objetivo de estudo aqui analisado, a ponte Rio-Niterói.

Recentemente, houve um projeto (BATTISTA, 1997) para solucionar as vibrações causadas por ventos constantes, que interditavam a mesma, no vão central.

Foi feito um estudo e foi desenvolvido um sistema de controle dinâmico para atenuar substancialmente as amplitudes das oscilações associadas ao fenômeno aeroelástico, que é produzido pelos ventos. Foram instalados 32 absorvedores dinâmicos dentro das vigas do vão central da ponte.

Quando a ponte começa a balançar, esses `sistemas massa-mola` entram de imediato em operação, produzindo forças de inércia que irão contrabalancear as forças produzidas pela estrutura. Esses absorvedores dinâmicos foram capazes de reduzir 80% das vibrações.

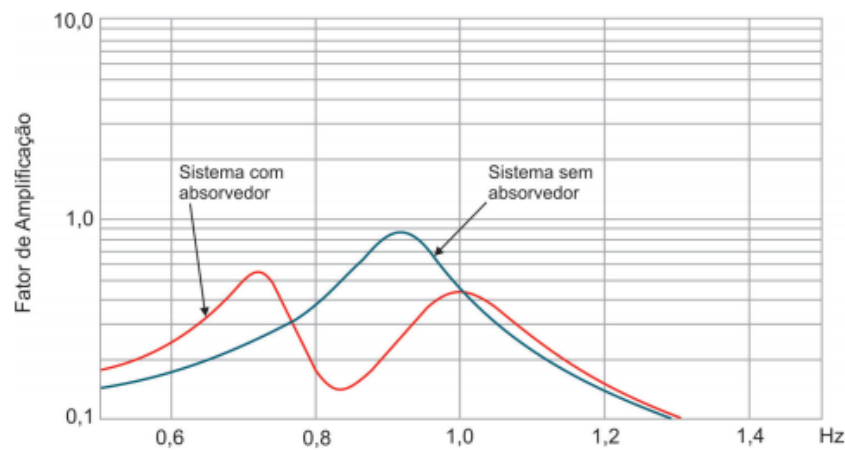


Figura 2. 1: Efeito de um absorvedor dinâmico

A figura 2.1 é um exemplo do efeito de um absorvedor dinâmico, quando um sistema, sem utilização do mesmo é excitado. Com o acoplamento do absorvedor sintonizado nessa frequência, haverá a atenuação da vibração da massa do sistema. Na figura, observa-se o aparecimento de ambos os lados da ressonância, de dois novos picos de ressonância que correspondem às frequências naturais do sistema acoplado. Quando o absorvedor é sintonizado para suprimir o pico de ressonância no sistema, a sua faixa de operação é bastante estreita.

2.2. Ponte

A análise do comportamento de pontes e viadutos quando submetidas a cargas dinâmicas é um estudo muito explorado por diversas universidades no mundo todo.

O objetivo dessa análise é estudar de forma mais realista as respostas que pontes sofrem quando são submetidas as condições normais de uso.

A primeira análise sobre o problema de vibrações em pontes surgiu por volta de 1850.

WILLIS foi o primeiro a estudar esse assunto, onde deduziu a equação de movimento onde uma massa com velocidade constante atravessava uma viga simplesmente apoiada, flexível e de massa desprezível.

Essa equação teve uma resposta por STOKES que achou uma solução exata usando uma técnica de expansão em séries.

O problema de uma carga pulsativa com uma velocidade constante só foi analisada em 1928 por TIMOSHENKO, onde foi levado em consideração as características dinâmicas do veículo.

Em 1950 AYRE, FORD e JACOBSEN, fazem uma investigação sobre a vibração de uma viga de dois vãos iguais, sujeitas a uma força constante.

Em 1955, são estudados as influências das irregularidades na superfície de rolamento na resposta dinâmica das pontes, por EDGERTON, BEECROFT e CHEFFEY.

O caso de carga móvel constituída por uma massa suportando uma massa suspensa é analisada por TUNG e BIGGS.

A partir dos anos 70, o estudo começa a ficar mais parecido com os estudos de hoje em dia, onde os modelos matemáticos utilizados na análise do problema de vibrações de ponte passam a ser desenvolvidos com base no método de elementos finitos. HUANG e VELETOSOS fazem um estudo da resposta dinâmica de vigas com massas concentradas, essas massas são corpos rígidos mais similares a um veículo, onde é considerado um sistema massa-mola-amortecedor, onde é simulado a suspensão do carro.

Uma análise de um modelo bidimensional sujeito à passagem de um veículo modelado como um conjunto de massas, molas e amortecedores com dois eixos é feito por SMITH em 1973.

Quando começou a ser empregado o método de elementos finitos, os modelos analisados ficaram cada vez mais refinados, e o estudo da vibração de pontes se tornou mais abrangente, graças às considerações que até então não haviam sido estudadas.

Em 1987 WU, LEE e LAI usam o método de elementos finitos para estudar a resposta dinâmica que as placas sofrem sob ação de cargas móveis. São considerados os efeitos da excentricidade e velocidade da carga móvel, assim como o comprimento do vão .

CARNEIRO em 1986 faz um estudo considerando matrizes de rigidez e amortecimento variáveis com a posição do veículo na estrutura, considera também o

problema de interação veículo-viga sob os primas da variação das propriedades dinâmicas do conjunto e da força de interação. Ele desenvolve um método de análise para vigas de pontes, com diversas condições de apoio e restrições, sob a ação de cargas móveis. O veículo é modelado como um sistema massa-mola-amortecedor.

INBANATHAN e WIELAND, em 1987, estudam a resposta dinâmica de pontes simplesmente apoiadas submetidas à ação de um veículo trafegando sobre superfícies irregulares. Admitem a viga com massas concentradas e o veículo é modelado como uma força concentrada ou, ainda, como uma massa movendo-se com velocidade constante sobre a estrutura. É considerado, também, o caráter não-determinístico da força dinâmica existente entre a roda do veículo e a irregularidade do pavimento, ressaltando que essa força dinâmica é calculada com base na densidade espectral das irregularidades superficiais, sem levar em conta a flexibilidade da ponte. Finalmente, é dado um tratamento estatístico à resposta dinâmica da estrutura.

No final dos anos 80, a comunidade científica que estuda o problema dos modelos empregados na análise da resposta dinâmica de pontes, tomou consciência da absoluta importância dos efeitos produzidos pelas irregularidades superficiais sobre o comportamento dos tabuleiros rodoviários. A modelagem que traduz o problema da maneira mais realista passa a ter destaque, para que o modelo seja o mais próximo possível de situações práticas.

Em 1990, SEDLACEK e DROSNER consideram a ponte discretizada em massas concentradas, e o veículo é modelado de duas formas distintas: um veículo simples com um número qualquer de eixos acoplados sobre uma massa rígida, e um veículo pesado, onde o cavalo mecânico e a carroceria estão ligados através de um apoio elástico.

FERREIRA em 1991 considera apenas os movimentos verticais das massas, desprezando-se as rotações no plano. Desenvolve também uma análise paramétrica sobre os efeitos causados pela ação das cargas móveis nos tabuleiros das pontes rodoviárias.

Em 1993 CHOMPOOMING e YENER fizeram uma análise do problema da interação veículo-ponte, onde são considerados os efeitos dinâmicos causados pelo salto do veículo causado pelas irregularidades da pista, assim como a variação de velocidade. Ainda em 93, NOWAK chega na conclusão que as cargas dinâmicas não dependem somente do vão, mas também da rugosidade da superfície rodoviária e das características dinâmicas do veículo.

Em 1994, um novo tipo de estudo foi feito, CHANG e LEE, fizeram uma análise sobre o comportamento dinâmicos de pontes simplesmente apoiadas submetidas ao tráfego de veículos sobre a superfície irregular do tabuleiro. Foram submetidos quatro tipos distintos de veículos. São considerados nesse estudo, os efeitos provenientes das irregularidades da pista.

ZIBDEH e RACKWITZ em 1995 fazem um estudo do problema de vibrações em vigas homogêneas isotrópicas, devido à passagem de diferentes tipos de cargas.

SILVA em 1996 e em 2002, propôs um coeficiente de majoração de esforços estáticos que considera todas as ações dinâmicas verticais provenientes dos veículos, inclusive as irregularidades da pista. O estudo feito por SILVA, é conduzido com base na implementação computacional da metodologia de análise no domínio do tempo. Tem por finalidade avaliar os efeitos dinâmicos provenientes de um perfil irregular do pavimento, ocasionado pelo desgaste da superfície ao longo do tempo.

O sistema veículo-ponte dá uma resposta dinâmica mediante interação das equações de movimento, considerando a excitação produzida pela interação entre os pneus do veículo e a superfície da ponte

Foi comprovado em 2002, através de uma análise paramétrica feita por GRECO e SANTINI, a eficácia dos coeficientes de amortecimento na redução das amplitudes das respostas dinâmicas.

As respostas de estudos indicam diferenças significativas, onde as respostas exatas possuem valores maiores do que as aproximações.

2.3. Vibrações mecânicas

Como os resultados desenvolvidos nesse projeto são inteiramente relacionados ao estudo de vibrações mecânicas, é válido ser feito uma pequena revisão sobre os conceitos que serão estudados.

Vibrações mecânicas são movimentos periódicos de corpos ou partículas, é o movimento de um ponto oscilando em torno de um ponto de referência. O número de vezes que ocorre o movimento em determinado tempo é chamado de frequência (Hz).

As vibrações relacionadas à máquinas ou estruturas é na maioria das vezes indesejável, pois ela aumenta as tensões e faz com que aconteça perdas de energia. No caso de veículos, produz desconforto para os passageiros, e uma queda no desempenho, é por esse motivo que as vibrações devem ser reduzidas sempre que possível.

Com esse propósito, existi análises de vibrações, que tem fundamental importância para as mais diversas áreas da engenharia, e vem se tornando cada vez mais importantes. Ela pode ajudar na manutenção preditiva de máquinas, construções de grandes obras de engenharia, no estudo de resistência de materiais e etc.

Esse estudo tem ajudado muito devido ao grande aumento de velocidades nas máquinas, e na construção de estruturas, pois pode assim diminuir a rigidez e potencializar os efeitos dinâmicos sobre elas.

Existem dois tipos de vibrações: as livres e a forçada.

- As vibrações livres ocorrem quando um sistema mecânico é definido desligado, e depois é deixado vibrar livremente, ou seja, quando o movimento é mantido unicamente pelas forças restauradoras.

Um exemplo é empurrar uma criança em um balanço e depois deixa-la livre balançando.

- As vibrações forçadas só acontecem quando uma perturbação variável no tempo é aplicada a um sistema mecânico, ou seja, quando uma força é aplicada ao sistema.

Um exemplo desse sistema é a vibração de um edifício durante um terremoto.

No geral uma vibração ocorre quando um sistema é afastado da sua posição de equilíbrio, θ_1 e tende a voltar ao equilíbrio sob as forças de restauração, que podem ser elásticas ou de campo.

Um ponto muito importante que deve-se analisar é o número de graus de liberdade. É o número de coordenadas cinematicamente independentes necessárias para descrever completamente o movimento espacial de toda partícula de um sistema em qualquer instante de tempo.

2.4. Amortecimento

O amortecimento também pode ser dito como atrito interno, e é uma das propriedades mais sensíveis de materiais e estruturas. É aonde a energia mecânica é dissipada.

É o amortecimento que vai determinar a amplitude de vibração na ressonância e o tempo de persistência da vibração depois que a excitação cessou.

Como um dos parâmetros mais importantes sobre amortecimento se tem o amortecimento crítico (c_c) que representa a menor magnitude de amortecimento para a qual nenhuma oscilação ocorre, em sistemas estruturais submetidos a vibrações livres.

A razão entre a constante de amortecimento e a constante de amortecimento crítico, dá origem ao fator de amortecimento (ζ), que dependendo do valor, indica o tipo de amortecimento presente: sub amortecido, criticamente amortecido ou superamortecido.

O movimento sub amortecido é quando uma vibração livre é levemente amortecida, sua amplitude decresce até que todo o movimento cesse, como mostrado na figura 2.2

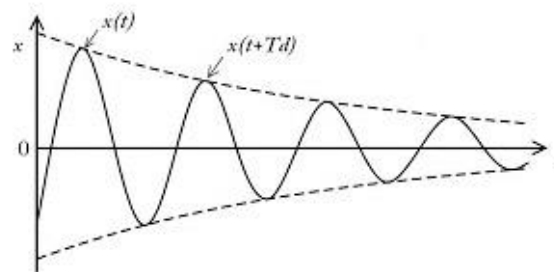


Figura 2. 2: Exemplo de amortecimento.

Todavia, o amortecimento pode ser tão grande, que toda a vibração é evitada, nesse caso, ele é superamortecido e se o sistema volta lentamente para a sua posição inicial de equilíbrio, o sistema é criticamente amortecido.

2.5. Conjunto massa-mola

Para entender melhor como funcionam as vibrações mecânicas, pode-se estudar o conjunto massa mola segundo a figura 2.3. A mola é supostamente ideal, ou seja, tem como nulo seu peso próprio, sem atritos de formações.

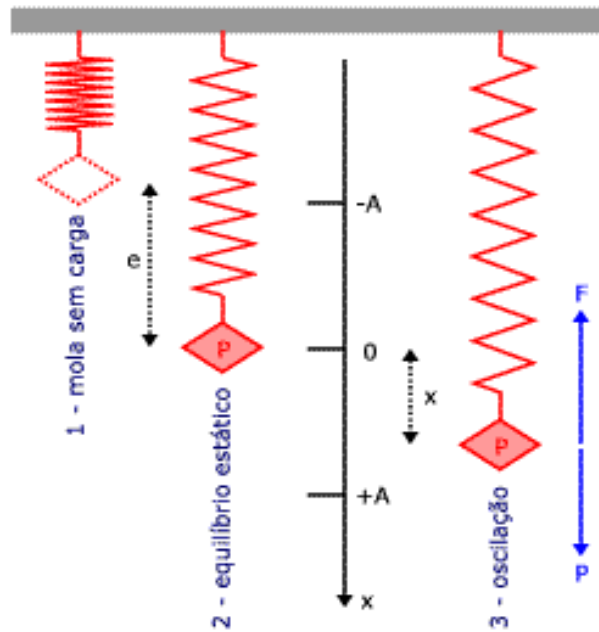


Figura 2. 3: Conjunto massa mola

Pode-se observar o deslocamento vertical indicado pela coordenada x , tem um propósito de obter uma formulação usual para a equação diferencial.

2.6. Graus de liberdade

2.6.1. Um grau de liberdade

Também existe o estudo de um grau de liberdade onde uma massa é presa na ponta de uma haste. Esse estudo é similar com o objetivo aqui proposto.

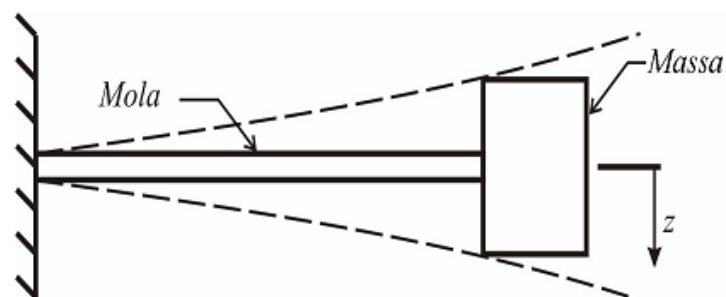


Figura 2. 4: Um grau de liberdade

Um grau de liberdade é o caso da figura 2.4, onde consta uma massa suspensa por uma mola. O único deslocamento possível (o da vertical) caracteriza o sistema como de um grau de liberdade. Em qualquer instante, pode-se determinar a posição mediante a uma única variável.

2.6.2. Dois graus de liberdade

Em um sistema de dois ou mais graus de liberdade, de acordo com a figura 2.5, o movimento de uma massa depende do movimento da outra, fazendo com que o sistema possua vários modos de vibração.

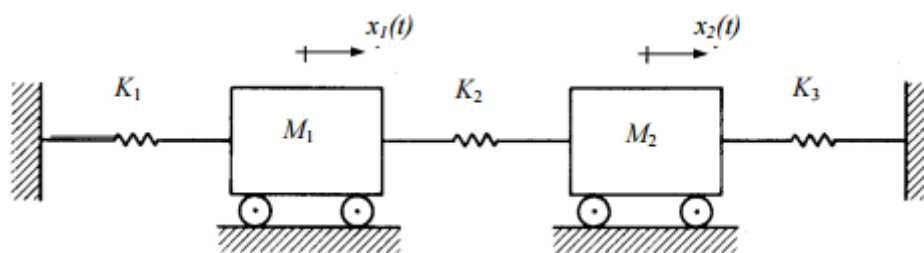


Figura 2. 5: Dois graus de liberdade.

O número de graus de liberdade é igual ao número de equações ordinárias, então se o sistema tem 3 graus de liberdade, ele possui 3 equações ordinárias. No caso desse trabalho serão vistos sistemas com 2 graus, 4 graus e 7 graus.

3. ANÁLISES MATEMÁTICAS

Podem ser chamadas também de modelos matemáticos. Eles são utilizados em inúmeros campos da atividade humana. Essa análise existe pois muitos problemas práticos necessitam de modelos matemáticos. Mesmo podendo ter situações diferentes, a abordagem e a filosofia são as mesmas. É uma forma matemática para tratar muitas teorias.

Esse modelo pode ser mostrado como uma representação de um sistema real. Isso significa que o modelo deve representar um sistema, assim como a forma como ocorrem suas modificações.

Ele permite entender o próprio modelo de uma forma mais simples, ou permite descrever por uma forma mais completa, de forma que esse modelo possa ser tão preciso quanto o real.

Uma análise matemática é uma interpretação simplificada da realidade, ou até mesmo uma interpretação de um fragmento de um sistema, de acordo com uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais, porém, as características essenciais do mundo real devem aparecer no modelo, de forma que seu comportamento seja ao menos similar àquele do sistema modelado.

No caso do estudo desse projeto, o modelo matemático dos veículos e da ponte tem o objetivo de representar as situações reais de veículos que passam sobre as pontes. Esses modelos são discretos, bidimensionais, e são constituídos de massa, mola e amortecedor.

Será abordado o modelo de $\frac{1}{4}$ da massa de um carro (com apenas uma roda) e o outro com $\frac{1}{2}$ da massa do veículo (com duas rodas) com dois e quatro graus de liberdade respectivamente. Assim como o modelo da ponte com sete nós, ou seja, quatorze graus de liberdade. Suas equações de movimento e características serão abordados.

De acordo com (BRANCO,2014) a diferença entre meio carro e um carro completo, entre quatro graus de liberdade e oito, é bem pequena, não sendo tão significativa nesse trabalho. Foi optado, por isso, o projeto de meio carro.

A análise e modelagem de cada veículo será feita separadamente, sendo que será primeiramente estudado o modelo de um quarto de carro, por se tratar de uma análise mais simples, posteriormente o meio carro passando por um obstáculo, e por fim, a ponte.

3.1. Modelo de um quarto de carro

O modelo estudado possui 2 graus de liberdade que consiste em uma massa m_1 , que é a massa do veículo, e m_2 , que é a massa da roda. Eles são ligados por um conjunto mola e amortecedor (c_1 e K_1) relacionadas ao veículo, e K_p à roda, que seria a rigidez do pneu. O modelo está representado na figura 3.1. Ele possui apenas um eixo, com dois graus de liberdade, sendo o movimento vertical da massa do veículo m_1 , representado pela coordenada x_1 , e o movimento vertical da massa da roda m_2 pela coordenada x_2 .

No primeiro modo de estudo, não serão impostas excitações, a única resposta esperada é a do próprio peso em função do tempo.

Nesse caso, será considerado o modelo como se ele estivesse elevado, fora do chão, porém, com a roda em contato com o solo sem fazer força. Em um instante t o veículo é solto.

O próprio peso será a excitação inicial, depois de um determinado valor ele entraria em repouso.

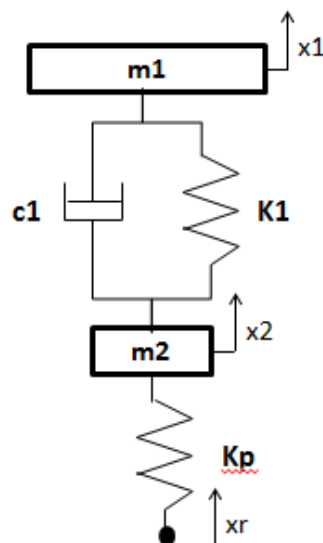


Figura 3. 1: Modelo de ¼ de carro

Foi optado por não inserir um amortecimento no pneu, pois segundo Buarque (2004), o coeficiente de amortecimento do pneu pode ser considerado desprezível por apresentar um valor significativamente baixo em relação ao coeficiente de amortecimento dos amortecedores.

Como primeiro passo foi feito o diagrama de corpo livre (DCL) do conjunto, conforme representado na figura 3.2, onde é aplicada a segunda lei de Newton. Cada corpo livre rígido tem-se:

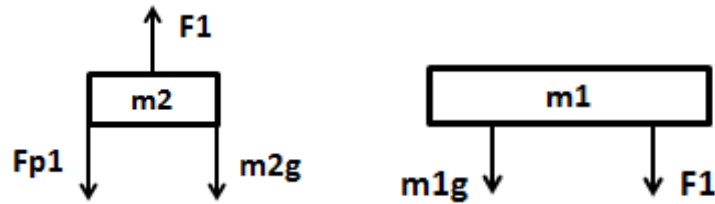


Figura 3. 2: DCL de um quarto de carro.

Pelo DCL foram obtidas as equações:

$$K_1 = (x_1 - x_2) \quad (3.1)$$

$$K_p = (x_2 - y) \quad (3.2)$$

$$c_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (3.3)$$

$$F_1 = c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) \quad (3.4)$$

$$F_{p1} = K_{p1}(x_2 - x_r) \quad (3.5)$$

Sendo F_1 a reação da m_1 na roda m_2 e F_{p1} a reação referente a excitação vinda do solo em m_2 e conseqüentemente no sistema.

Equação referente a m_1 :

$$+\uparrow \Sigma F_y = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.6)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_1 \dot{x}_2 + K_1 x_1 - K_1 x_2 = -m_1 g$$

Equação referente a m_2 :

$$+\uparrow \Sigma F_y = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.7)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_1 \dot{x}_1 + c_1 \dot{x}_2 - K_1 x_1 + K_1 x_2 + K_{p1} x_2 = -m_2 g + K_{p1} x_r$$

Para os cálculos foram pesquisados valores próximos ao encontrados nos carros a passeio. Na tabela 3.1 seguem os valores utilizados:

Tabela 3. 1: Valores utilizados para um quarto de carro

k_1	23000 N/m
k_p	200000 N/m
c_1	1600 Ns/m
m_1	250 Kg
m_2	7 Kg

Conforme GILLESPIE (1992), para um bom nível de conforto, a relação de amortecimento (ζ) normalmente fica entre 0,2 e 0,4, foi escolhido o valor de 0,3 para esse modelo.

Com o fator de amortecimento, e utilizando as expressões abaixo, será possível calcular a constante de amortecimento c_1 .

$$\zeta = c/c_c \qquad c = \zeta \cdot 2\sqrt{K \cdot m}$$

Matricialmente, as equações (3.6) e (3.7) podem ser escritas como:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t) \qquad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 + K_{p1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 g \\ -m_2 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{p1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz massa}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor aceleração}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_1 \\ c_1 & c_1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz amortecimento}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor velocidade}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 + K_{p1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz rigidez}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz deslocamento}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 g \\ -m_2 g \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz excitação}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{p1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz excitação}$$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor excitação}$$

3.2. Modelo de meio carro

Nesse modelo será estudado meia massa de carro com dois conjuntos de suspensão (amortecedor e mola) e 4 GDL (figura 3.3), se diferenciando do um quarto de veículo que possuía um conjunto e 2 GDL e também por seu grau de dificuldade e exatidão da resposta. Seu DCL é representado pela figura 3.4.

Esse modelo de veículo possui dois eixos, uma massa suspensa e duas massas não-suspensas.

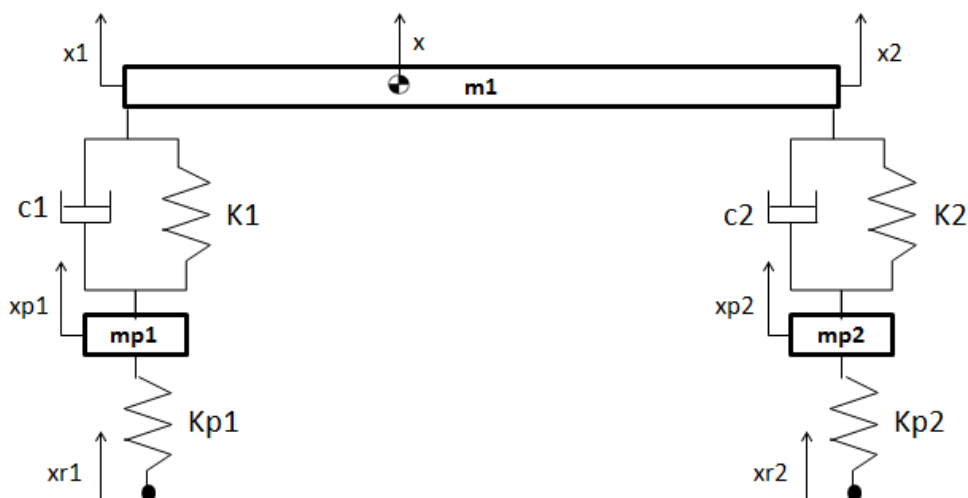


Figura 3. 3: Representação de meio carro

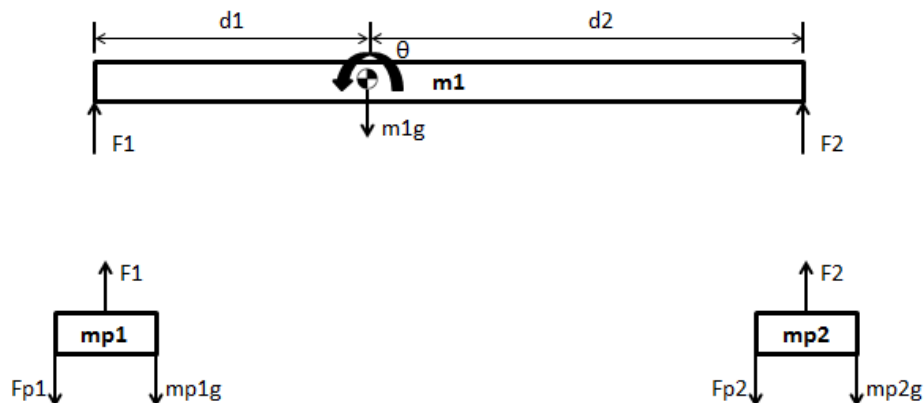


Figura 3. 4: DCL meio carro

Os valores dos parâmetros associados a este modelo são listados na tabela 3.2:

Tabela 3. 2: Valores utilizados para meio carro

k_1	23000 N/m
k_2	17000 N/m
C	1600 Ns/m
m_1	500 Kg
m_{p1}	7 Kg
m_{p2}	7 Kg
k_p	200000 N/m
J	630 Kg m^2
d_1	996 mm
d_2	1495 mm

Esse modelo será testado considerando-se uma excitação de base do tipo “lombada”, que foi desenvolvido seguindo a resolução 39 do CONATRAN – Conselho Nacional de Trânsito (CARVALHO e MANZON, 2013), medindo 1,5 m de comprimento e 0,08 m de altura.

O equacionamento terá como base o DCL, figura 3.4, e resultará em quatro equações de equilíbrio dinâmico, sendo duas resultantes das forças atuantes na massa do veículo e outras duas das forças atuando nas rodas.

Primeiramente, é preciso analisar as forças, principalmente no primeiro corpo, por esse apresentar o movimento de arfagem. Toda a análise e equacionamento será feito considerando um modelo linear, por facilitar os cálculos e segundo BRANCO (2014) a diferença entre o modelo linear e o não linear é pequena, podendo essa ser desconsiderada.

Os deslocamentos x_1 e x_2 serão calculados de forma linear, sendo eles diretamente dependentes do deslocamento do centro de massa, da distância entre o CM e o ponto de ancoragem da suspensão e do ângulo de arfagem θ . Os deslocamentos x_1 e x_2 podem ser calculados por:

$$x_1 = (x + d_1\theta) \quad (3.9)$$

$$x_2 = (x - d_2\theta) \quad (3.10)$$

Assim as forças ficam expressas por:

$$F_1 = K_1(x + d_1\theta - x_{p1}) + c_1(\dot{x} + d_1\dot{\theta} - \dot{x}_{p1}) \quad (3.11)$$

$$F_2 = K_2(x - d_2\theta - x_{p2}) + c_2(\dot{x} - d_2\dot{\theta} - \dot{x}_{p2}) \quad (3.12)$$

$$F_{p1} = K_{p1}(x_{p1} - x_{r1}) \quad (3.13)$$

$$F_{p2} = K_{p2}(x_{p2} - x_{r2}) \quad (3.14)$$

O equilíbrio dinâmico do corpo do veículo é expresso por:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma Fy = m_1 \ddot{x}_1 &\rightarrow F_1 + F_2 + mg = -m_1 \ddot{x} \\ m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_1 d_1 \dot{\theta} - c_1 \dot{x}_{p1} + K_1 x + K_1 d_1 \theta - K_1 x_{p1} + c_2 \dot{x} - c_2 d_2 \dot{\theta} \\ - c_2 \dot{x}_{p2} + K_2 x - K_2 d_2 \theta - K_2 x_{p2} &= -m_1 g \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M = J \ddot{\theta} &\rightarrow -F_1 d_1 + F_2 d_2 = J \ddot{\theta} \\ J \ddot{\theta} + c_1 \dot{x} d_1 + c_1 d_1^2 \dot{\theta} - c_1 \dot{x}_{p1} d_1 + K_1 x d_1 + K_1 d_1^2 \theta - K_1 x_{p1} d_1 - c_2 \dot{x} d_2 \\ + c_2 d_2^2 \dot{\theta} + c_2 \dot{x}_{p2} d_2 - K_2 x d_2 + K_2 d_2^2 \theta + K_2 x_{p2} d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Resultando no completo equacionamento do corpo do veículo. Fazendo-se o somatório de forças para a roda 1, obtêm-se:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma Fy = m_{p1} \ddot{x}_{p1} &\rightarrow -F_{p1} + F_1 - m_{p1} g = m_{p1} \ddot{x}_{p1} \\ m_{p1} \ddot{x}_{p1} + K_{p1} x_{p1} - K_{p1} x_{r1} - c_1 \dot{x} - c_1 d_1 \dot{\theta} + c_1 \dot{x}_{p1} - K_1 x - K_1 d_1 \theta \\ + K_1 x_{p1} &= -m_{p1} g \end{aligned} \quad (3.17)$$

E para a roda 2:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma Fy = m_{p2} \ddot{x}_{p2} &\rightarrow -F_{p2} + F_2 - m_{p2} g = m_{p2} \ddot{x}_{p2} \\ m_{p2} \ddot{x}_{p2} + K_{p2} x_{p2} - K_{p2} x_{r2} - c_2 \dot{x} + c_2 d_2 \dot{\theta} + c_2 \dot{x}_{p2} - K_2 x + K_2 d_2 \theta \\ + K_2 x_{p2} &= -m_{p2} g \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na forma matricial, obtêm-se para esse modelo as matrizes e vetores correspondentes a equação (3.8), isto é,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz massa}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_{p1} \\ \ddot{x}_{p2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor aceleração}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 d_1 - c_2 d_2 & -c_1 & -c_2 \\ c_1 d_1 - c_2 d_2 & c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 & -c_1 d_1 & c_2 d_2 \\ -c_1 & -c_1 d_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 & c_2 d_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz amortecimento}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_{p1} \\ \dot{x}_{p2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor amortecimento}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & K_1 d_1 - K_2 d_2 & -K_1 & -K_2 \\ K_1 d_1 - K_2 d_2 & K_1 d_1^2 + K_2 d_2^2 & -K_1 d_1 & K_2 d_2 \\ -K_1 & -K_1 d_1 & K_1 + K_{p1} & 0 \\ -K_2 & K_2 d_2 & 0 & K_2 + K_{p2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz rigidez}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \\ x_{p1} \\ x_{p2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor deslocamento}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 g \\ 0 \\ -m_{p1} g \\ -m_{p2} g \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz excitação}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz excitação}$$

$$\begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vetor excitação}$$

3.3. Modelo da estrutura da ponte

A ponte estudada nesse caso pode ser considerada uma viga bi-apoiada possuindo 7 nós. Em todos os nós, serão usadas as seguintes convenções de sinais:

- Rotações positivas no sentido anti-horário;
- Forças positivas no sentido positivo do eixo y;
- Momentos positivos no sentido anti-horário;
- Deslocamentos positivos no sentido positivo do eixo y.

Para o entendimento de como as forças agem sobre a viga, é preciso fazer uma análise do deslocamento transversal e da relação Deformação-Deslocamento.

Para os cálculos, foram utilizados os parâmetros que são apresentados na tabela 3.3. O momento de inércia deve ser diferente no caso do modelo da ponte com e sem absorvedor. A ponte sem absorvedor possui um momento de inércia menor, obtendo deslocamentos menores, facilitando a análise. Usando o mesmo valor de I no caso da ponte com o absorvedor, o deslocamento estático ficaria muito elevado, com isso usa-se

um valor de inércia maior, para obter deslocamentos aceitáveis. Para o projeto será utilizado o maior momento de inércia.

Tabela 3. 3: Valores utilizados para o cálculo da ponte

L	10 m	-
Lp	60 m	-
E	200×10^9 Pa	-
I	8×10^{-5} Kgm ²	Sem absorvedor
I	8×10^{-3} Kgm ²	Com absorvedor
r_0	7850 Kg/m ³	-
A	0,48 m ²	-
F	1000 N	-
v	15 Km/h ²	-

A ponte foi considerada como uma viga caixão cujas dimensões transversais são: largura de 5780 mm, altura de 300 mm e espessura da parede de 40 mm.

3.3.1. Deslocamento transversal

A viga bi-apoiada é considerado reta, com uma área de seção transversal A , momento de inércia I da área da seção transversal em relação ao eixo centroidal, comprimento l e módulo de elasticidade longitudinal E .

A figura 3.5 mostra a ponte (viga bi-apoiada) com todos os seus nós e os correspondentes graus de liberdade de flexão.

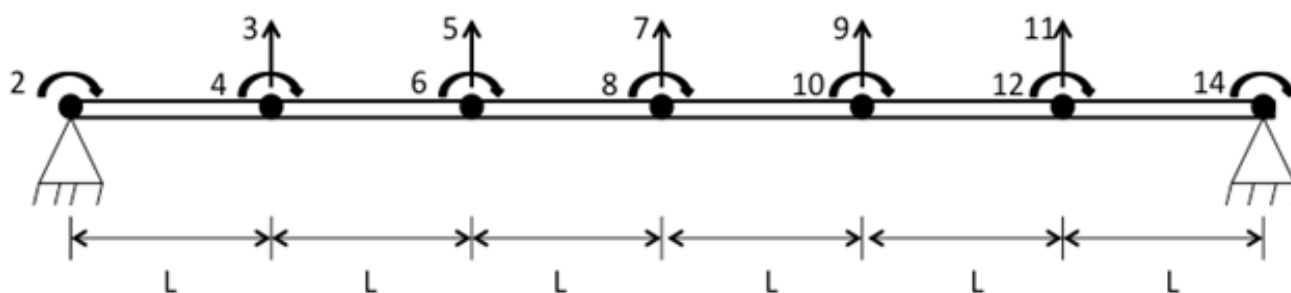


Figura 3. 5: Representação de uma ponte com 7 nós

Para essa análise, será considerada apenas uma parte da ponte, com 2 nós.

Cada um deles possui um deslocamento transversal na direção y e uma rotação em torno do eixo z . Com isso, possui quatro graus de liberdade, como representado na figura 3.6.

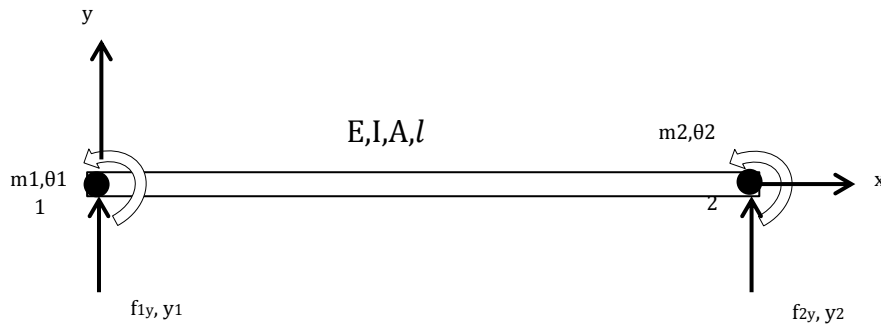


Figura 3. 6: DCL entre 2 nós

Os deslocamentos transversais serão denominados de y_1 e y_2 e as rotações θ_1 e θ_2 . As forças nodais f_{y1} e f_{y2} e os momentos por m_1 e m_2 como mostrado na figura 3.6.

A equação diferencial da viga será:

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0 \quad (3.19)$$

Onde, $y(x)$ é a função de deslocamento transversal na direção do eixo y . A função de deslocamento transversal pode ser escrita como:

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (3.20)$$

Essa expressão pode ser escrita em função dos graus de liberdade y_1 , y_2 , θ_1 e θ_2 . Aplicando a equação (3.20) nos pontos nodais, tem-se:

$$y(0) = y_1 = a_1 \quad (3.21)$$

$$\frac{dy(0)}{dx} = \theta_1 = a_2 \quad (3.22)$$

$$y(l) = y_2 = a_1 + a_2 l + a_3 l^2 + a_4 l^3 \quad (3.23)$$

$$\frac{dy(l)}{dx} = \theta_2 = a_2 + 2a_3 l + 3a_4 l^2 \quad (3.24)$$

Substituindo as equações:

$$y_2 = y_1 + \theta_1 l + a_3 l^2 + a_4 l^3 \quad (3.25)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 2a_3 l + 3a_4 l^2 \quad (3.26)$$

$$a_4 = \frac{\theta_2}{3l^2} - \frac{\theta_1}{3l^2} - \frac{2a_3 l}{3l^2} \quad (3.27)$$

$$a_3 = \frac{y_2}{l^2} - \frac{y_1}{l^2} - \frac{\theta_1 l}{l^2} - \frac{a_4 l^3}{l^2} \quad (3.28)$$

$$a_3 = \frac{y_2}{l^2} - \frac{y_1}{l^2} - \frac{\theta_1}{l} + \frac{\theta_2}{3l} + \frac{\theta_1}{3l} + \frac{2a_3}{3} \quad (3.29)$$

$$\frac{a_3}{3} = \frac{y_2}{l^2} - \frac{y_1}{l^2} - \frac{2\theta_1}{3l} - \frac{\theta_2}{3l} \quad (3.30)$$

Assim, conclui-se que a_1, a_2, a_3 e a_4 são:

$$a_1 = y_1 \quad (3.31)$$

$$a_2 = \theta_1 \quad (3.32)$$

$$a_3 = \frac{-3y_1}{l^2} - \frac{2\theta_1}{l} + \frac{3y_2}{l^2} - \frac{\theta_2}{l} \quad (3.33)$$

$$a_4 = \frac{2y_1}{l^3} + \frac{\theta_1}{l^2} - \frac{2y_2}{l^3} + \frac{\theta_2}{l^2} \quad (3.34)$$

Com isso a equação $y(x)$ ficará:

$$y(x) = \frac{y_1}{l^3} (l^3 - 3lx^2 + 2x^3) + \frac{\theta_1}{l^3} (xl^3 - 2l^2x^2 + xl^3) + \frac{y_2}{l^3} (3lx^2 - 2x^3) + \frac{\theta_2}{l^3} (-x^2l^2 + lx^3) \quad (3.35)$$

Simplificando a equação:

$$N_1 = \frac{1}{l^3} (l^3 - 3lx^2 + 2x^3) \quad (3.36)$$

$$N_2 = \frac{1}{l^3} (xl^3 - 2l^2x^2 + xl^3) \quad (3.37)$$

$$N_3 = \frac{1}{l^3} (3lx^2 - 2x^3) \quad (3.38)$$

$$N_4 = \frac{1}{l^3} (-x^2l^2 + lx^3) \quad (3.39)$$

Com essas simplificações, a equação (3.35) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$y(x) = N_1y_1 + N_2\theta_1 + N_3y_2 + N_4\theta_2 \quad (3.40)$$

A equação 3.40 pode ser escrita em forma de matriz, que é chamada função de forma para o elemento de viga:

$$y(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

3.3.2. Relação deformação – deslocamento

Para se calcular todos os esforços que a viga sofre, é preciso saber a relação deformação-deslocamento axial da mesma.

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du}{dx} \quad (3.42)$$

Sendo que u é a função de deslocamento axial.

A relação do deslocamento axial com o deslocamento transversal é:

$$u = -y \frac{dy(x)}{dx} \quad (3.43)$$

Substituindo a equação 3.43 em 3.42 pode-se obter:

$$\varepsilon_x(x, y) = -y \frac{d^2y(x)}{dx^2} \quad (3.44)$$

De acordo com a teoria elementar da viga, o momento de flexão e de cisalhamento serão:

$$M = EI \frac{d^2y(x)}{dx^2} \quad Q = EI \frac{d^3y(x)}{dx^3} \quad (3.45)$$

3.3.3. Matriz rigidez

A figura 3.7 é um exemplo da viga apoiada explicada anteriormente. A matriz rigidez da ponde (K) é obtida a partir da matriz rigidez de cada elemento que participa da discretização da mesma. Os sentidos positivos dos momentos, rotações, forças e deslocamentos nodais são mostrados na Figura 3.7.

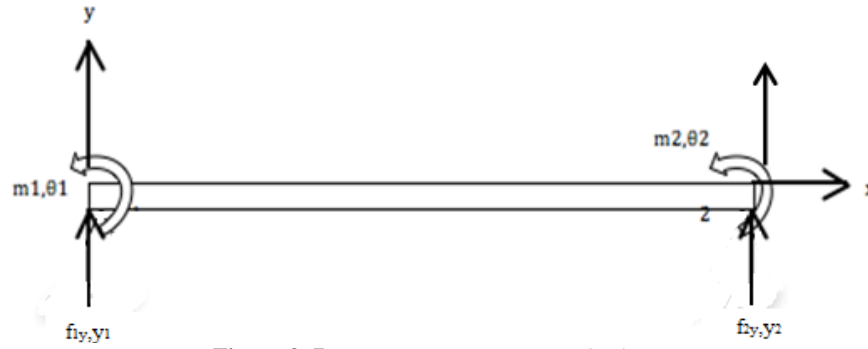


Figura 3. 7: Forças e momentos entre 2 nós

De acordo com convenções de sinais usadas na teoria elementar de viga, as forças positivas de cisalhamento Q e os momentos de flexão M são mostrados na figura 3.8.

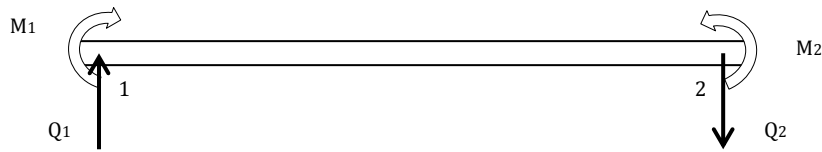


Figura 3. 8: Forças de cisalhamento e de flexão

Usando as equações (3.35) e (3.45) é possível obter os momentos de flexão e as forças de cisalhamento nodal.

$$f_{1y} = Q_1 = EI \frac{d^3y(0)}{dx^3} = EI6a_4 = \frac{EI}{l^3} (12y_1 + 6\theta_1l - 12y_2 + 6\theta_2l) \quad (3.46)$$

$$m_1 = -M_1 = EI \frac{d^2y(0)}{dx^2} = -EI2a_3 = \frac{EI}{l^3} (6ly_1 + 4\theta_1l^2 - 6ly_2 + 2\theta_2l^2) \quad (3.47)$$

$$f_{2y} = -Q_2 = -EI \frac{d^3y(l)}{dx^3} = EI6a_4 = \frac{EI}{l^3} (-12y_1 - 6\theta_1l + 12y_2 - 6\theta_2l) \quad (3.48)$$

$$m_2 = M_2 = EI \frac{d^2y(l)}{dx^2} = -EI2a_3 = \frac{EI}{l^3} (6ly_1 + 4\theta_1l^2 - 6ly_2 + 2\theta_2l^2) \quad (3.49)$$

Usando a equação na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \{f\}_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Pegando a matriz rigidez de 2 nós e implementando para uma matriz 7 nós, ela ficará:

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

3.3.4. Matriz massa

A matriz massa do sistema não sofre alteração com a travessia de veículos sobre a ponte. Com isso, a mesma permanece constante durante a integração das equações de movimento do sistema veículo ponte.

A lógica para o cálculo da matriz massa é similar a de rigidez, é obtida a partir da matriz de massa de cada elemento que participa da discretização da mesma.

Assim, pode-se obter:

$$M = \rho \frac{Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

3.3.5. Amortecimento da estrutura

Todo o material apresenta um certo nível de amortecimento natural oriundo da dissipação da energia interna de um sistema. Essas perdas, sejam elas grandes ou pequenas, influenciam diretamente no comportamento da estrutura ou equipamento, inclusive em certos casos se tornando um fator essencial no projeto. No caso da ponte não é diferente, pois, é devido a esse amortecimento interno que a vibração da estrutura cessa depois de um determinado intervalo. Sem esse amortecimento, a estrutura continuaria vibrando até um fator externo amortecê-lo. Com isso, para esse modelo, considerou-se o amortecimento como 0,1 da matriz massa e da matriz rigidez, como é mostrada na equação (3.51).

$$C = 0,1 \times K + 0,1 \times M \quad (3.51)$$

3.3.6. Forçamento

Uma força, com carga e velocidade constantes, é aplicada à estrutura da ponte. Ela irá servir como um teste para analisar o funcionamento do modelo e ajustá-lo antes de acoplar o veículo. A análise dessa força será feita por sessões entre dois nós como mostra a figura 3.9, onde serão calculadas as reações nos nós pelas equações 3.52 e 3.53.

$$F_2 = \left(\frac{L - x}{L} \right) \times F \quad (3.52)$$

$$F_4 = \frac{x}{L} \times F \quad (3.53)$$

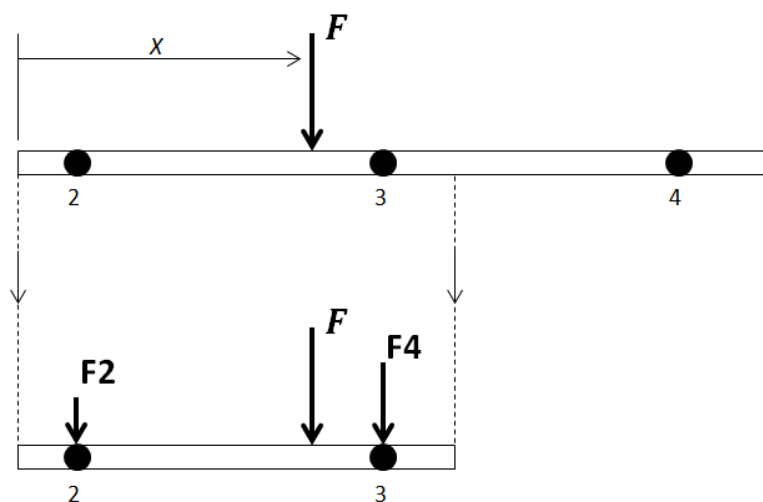


Figura 3. 9: Força passante e reação da ponte

4. RESULTADOS DOS MODELOS ISOLADOS

Após todo o equacionamento feito anteriormente, é preciso fazer a implementação numérica.

O programa, ou rotina do MatLab, é um conjunto de equações, linhas de comando e parâmetros que seguem uma lógica determinada pelo programador. As equações são todas as fórmulas que serão calculadas por uma função no MatLab utilizando os parâmetros estabelecidos na rotina, no caso desse projeto, será utilizado a função “ode45” e “ode23s”.

Será abordada aqui, a análise dos resultados obtidos para um quarto, meio carro, e para a ponte.

4.1. Um quarto de carro

Por se tratar de um quarto de carro, a rotina foi mais simples, pois se trata de um modelo de dois graus de liberdade, e os resultados obtidos foram aceitáveis para o tipo de modelo, os mesmos foram comparados com uma análise estática. Tanto a dinâmica quanto a estática se mostraram coerentes.



Figura 4. 1: Força vertical de massa

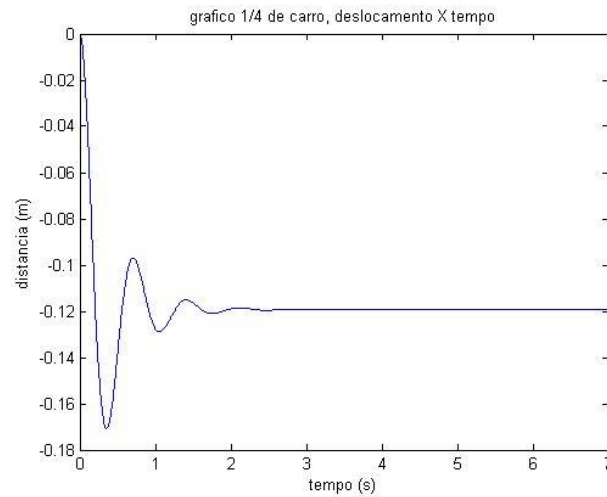


Figura 4. 2: Deslocamento do pneu no solo

As figuras 4.1 e 4.2 representam o deslocamento sofrido pelo modelo quando o mesmo é solto e sofre a ação do próprio peso, e a força gerada por ele no decorrer da ação. A partir de certo momento ele se mostra constante, atingindo assim uma situação de repouso.

4.2. Meio carro

A análise de meio carro é mais complexa, pois se trata de um modelo de quatro graus de liberdade e será acrescentado um obstáculo à rotina. Esse obstáculo, como dito anteriormente, será do tipo “lombada”. Nesse caso, será imposta ao modelo uma certa velocidade para que o mesmo seja capaz de ultrapassar o obstáculo.

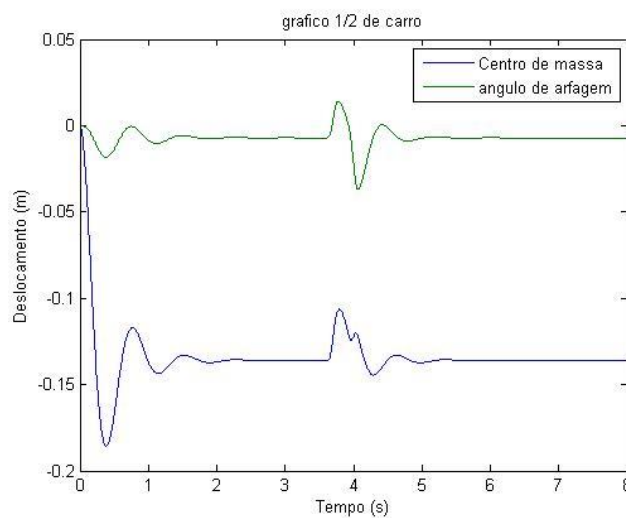


Figura 4. 3: Deslocamento do GG e variação θ 1/2 carro

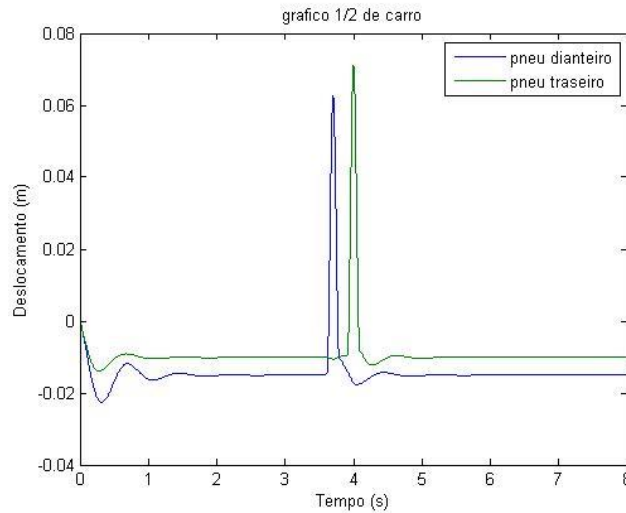


Figura 4. 4: Deslocamento dos pneus

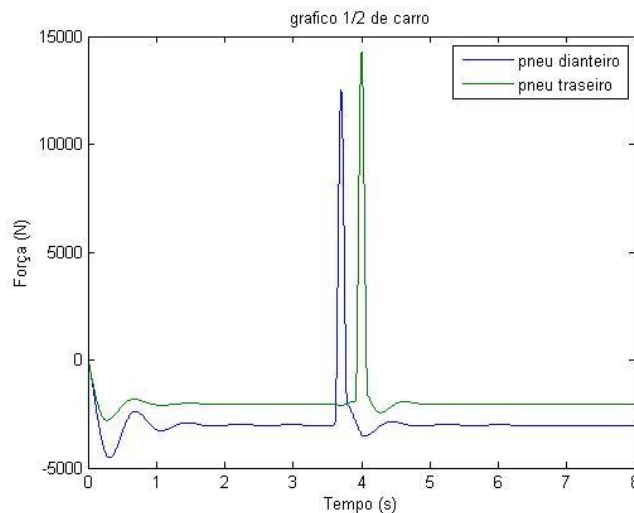


Figura 4. 5: Força nos pneus.

Os gráficos mostrados nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 representam as respostas do modelo no decorrer do trajeto, onde o início do gráfico mostra o veículo sendo solto e a ação do peso, seguindo pela situação de repouso vertical até a roda dianteira passar pelo obstáculo, gerando o primeiro pico. O segundo pico representa a roda traseira.

4.3. Ponte

Análise da ponte consiste em ver como ela se comportará quando submetida a um carregamento de uma força passando por toda a sua estrutura. Nesse caso, a mesma consiste em uma ponte com 60 metros de vão.

Introduzindo as condições de contorno nos apoios, o modelo consiste em doze graus de liberdade

A figura 4.6 ilustra a vibração na ponte no meio de seu vão em função do tempo durante e após a passagem da força.

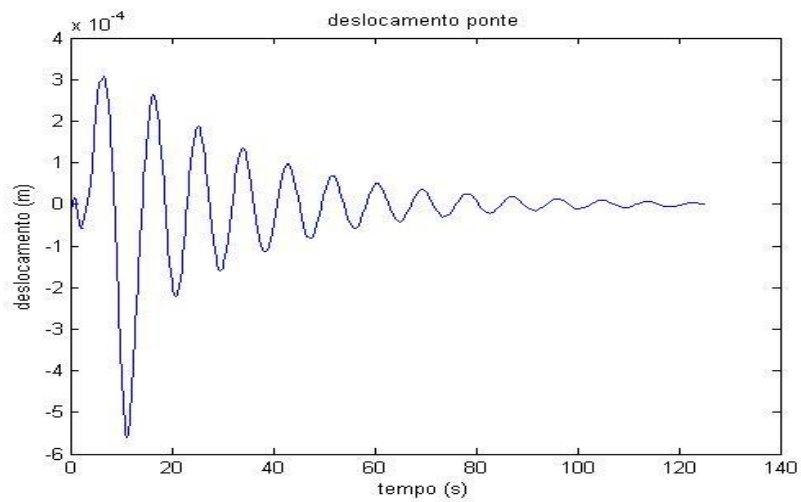


Figura 4. 6: Deslocamento x tempo ponte

5. ACOPLAMENTO DOS MODELOS VEÍCULO-PONTE

5.1. Análise de vibração da ponte interagindo com o modelo de um quarto de carro

Após serem feitos os estudos e as rotinas do modelo de ¼ de carro e da ponte separadamente, eles serão unidos para criar um modelo simplificado, figura 5.1, de um viaduto que possibilite uma análise das vibrações e dos resultados referentes à diminuição destas por meio da implementação do absorvedor dinâmico.

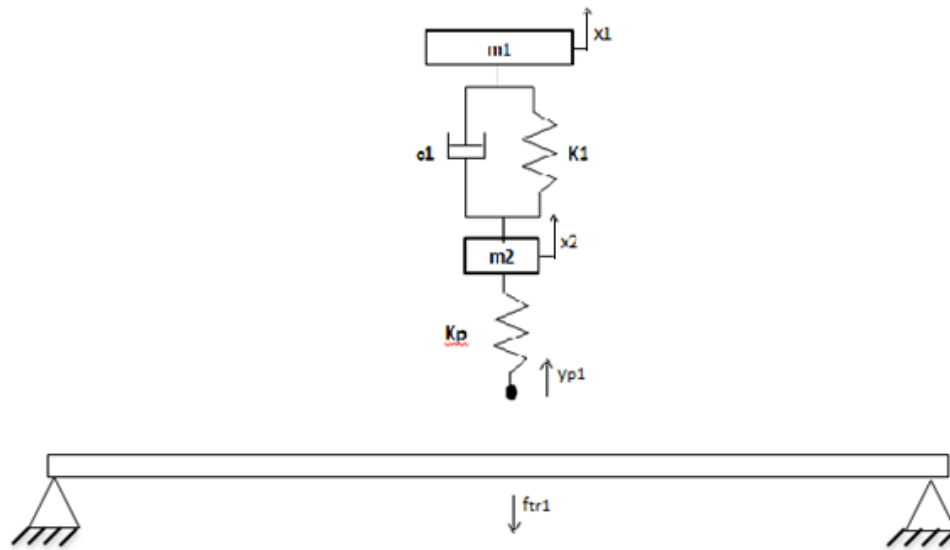


Figura 5. 1:Modelo simplificado da ponte com um quarto de carro

Primeiramente, deve-se entender a lógica de como esses dois componentes irão interagir. A ponte precisa de uma força externa para iniciar a deformação e por sua vez o carro precisa de uma excitação do solo para sair da inércia, a força vai ser gerada pelo veículo, de acordo com a equação 5.1 e o deslocamento de base pela ponte, que vai ser calculada pela equação 5.2.

$$F_{tr} = K_p * (y(t) - u) \quad (5.1)$$

$$u = N_1 * y(t_1) + N_2 * y(t_2) + N_3 * y(t_3) + N_4 * y(t_4) \quad (5.2)$$

Quando o carro entra na ponte, ele gera uma deformação devido à sua força, e a partir do momento que essa deformação começa, ela excita o carro, gerando compressão na mola e no pneu. Após esse início, o sistema se auto mantém enquanto o carro continuar em movimento sobre a ponte.

Para a criação do programa do conjunto ponte-veículo é acrescentado os dados do veículo na rotina da ponte e é realizado todo um ajuste, um equacionamento e uma

programação nova. Esse equacionamento é feito unindo as matrizes de cada modelo, gerando assim uma matriz única referente ao conjunto. Abaixo estão as matrizes de cada modelo em separado, sendo a equação 5.3 a do veículo e a equação 5.4 da ponte. Fazendo a união das duas se obtêm a equação 5.5.

$$y_{pv} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -m_v^{-1}k_v & -m_v^{-1}c_v \end{bmatrix} [y_v] + \begin{bmatrix} [0] \\ k_{vp} \end{bmatrix} [y_{vr}] \quad (5.3)$$

$$y_{pp} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -m_p^{-1}k_p & -m_p^{-1}c_p \end{bmatrix} [y_p] + \begin{bmatrix} [0] \\ m_p^{-1} \end{bmatrix} [F(t)] \quad (5.4)$$

$$y_p = \begin{bmatrix} [a_v] & [0] \\ [0] & [a_p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [y_v] \\ [y_p] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ k_{vp} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} [0] \\ m_p^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{vr} \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

As equações 5.6, 5.7 e 5.8, são respectivamente as matrizes de estado de cada modelo em separado e do sistema como conjunto.

$$a_v = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -m_v^{-1}k_v & -m_v^{-1}c_v \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$a_p = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -m_p^{-1}k_p & -m_p^{-1}c_p \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$a_p = \begin{bmatrix} [a_v] & [0] \\ [0] & [a_p] \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Com a rotina devidamente pronta se obtêm os gráficos expostos nas figuras abaixo como resposta, onde a figura 5.2 mostra o deslocamento vertical do carro e da roda em relação ao tempo e a figura 5.3 apresenta o deslocamento vertical da ponte no centro dela, em relação ao tempo.

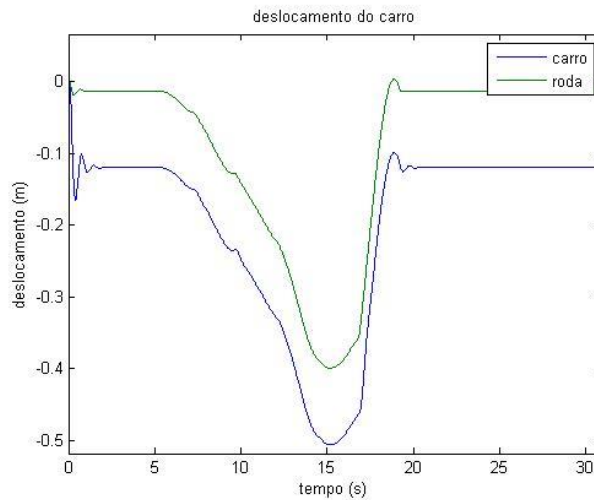


Figura 5. 2: Deslocamento do carro com velocidade de 15 Km/h

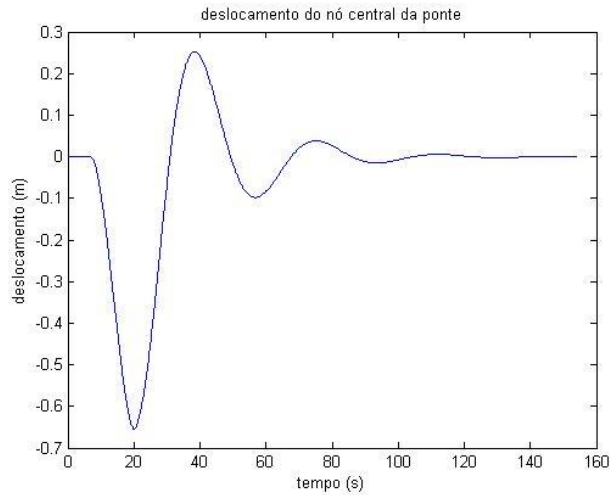


Figura 5. 3: Deslocamento no vão central da ponte com velocidade de 15km/h

5.2. Análise de vibração da ponte com o modelo de meio carro passante.

No caso da ponte com meio carro passante, não existe grandes diferenças em relação ao programa e ao equacionamento com $\frac{1}{4}$ de carro passante, apenas é acrescentado dois graus de liberdade relacionados ao acréscimo de mais uma roda do meio carro, figura 5.4.

As figuras abaixo mostram os resultados obtidos pela rotina de meio carro com a ponte. A figura 5.5 mostra o deslocamento do centro da ponte, enquanto que as figuras 5.6 e 5.7 apresentam os gráficos referentes aos deslocamentos do veículo.

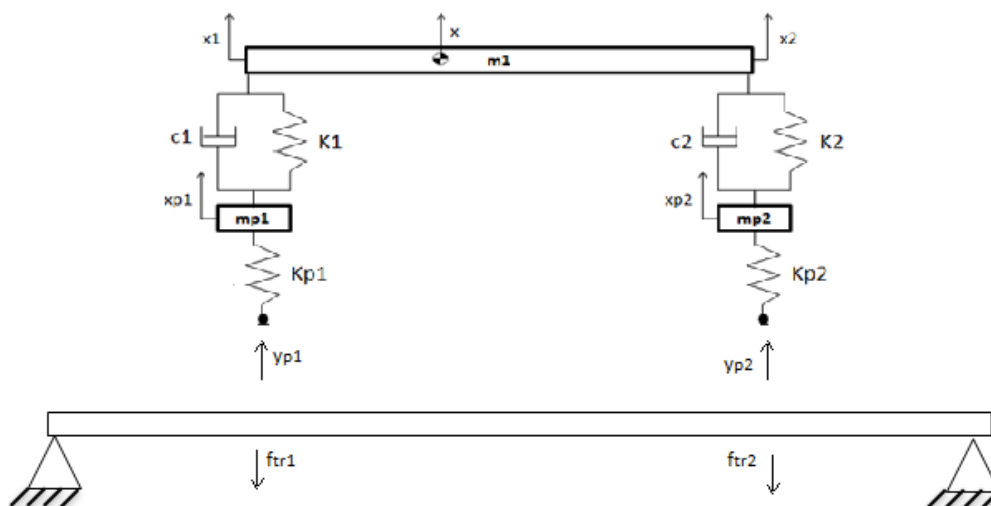


Figura 5. 4: Modelo simplificado da ponte com meio carro

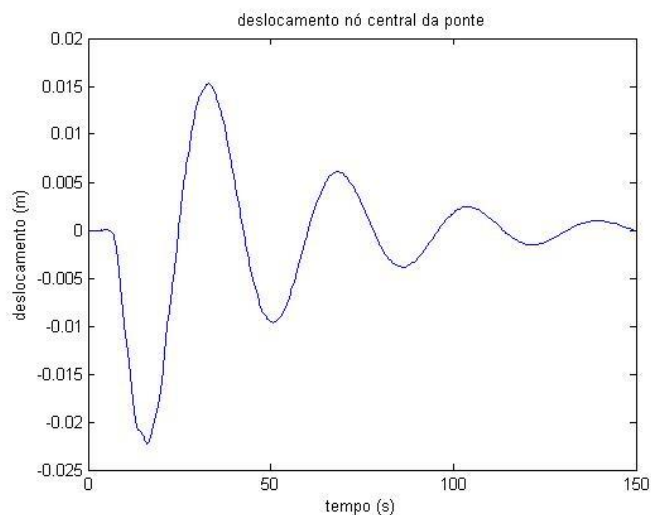


Figura 5. 5: Deslocamento do centro da ponte com uma velocidade de 15km/h

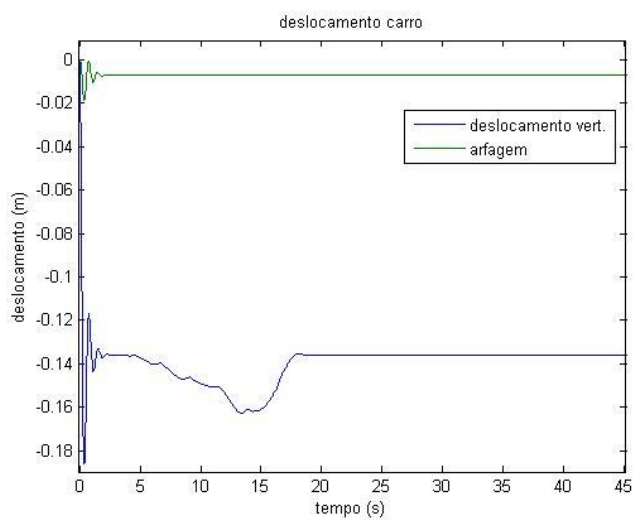


Figura 5. 6: Deslocamento do carro com uma velocidade de 15km/h

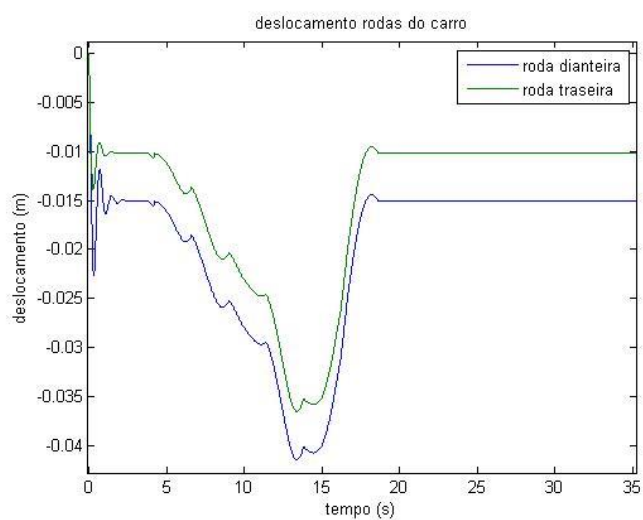


Figura 5. 7: Deslocamento das rodas do carro com uma velocidade de 15km/h

6. INTRODUÇÃO DO ABSORVEDOR DINÂMICO NO SISTEMA VEÍCULO-PONTE

Para realizar o objetivo deste estudo que é o projeto de um absorvedor passivo de vibrações ou absorvedor dinâmico, deve ser criada uma lógica no MatLab que possibilite a análise da absorção da vibração na ponte e que também permita a fácil mudança dos valores referentes ao absorvedor, possibilitando a comparação da absorção frente a uma gama de valores.

Com o sistema ponte-veículo pronto, será iniciado a implementação do absorvedor, que seria o acréscimo de 1 grau de liberdade a mais no modelo da ponte por absorvedor. Neste estudo não irá utilizar mais que 3 absorvedores dinâmicos, ou seja, 3 graus de liberdade a mais serão acrescentados a ponte. Cada absorvedor será uma linha e uma coluna a mais nas matrizes de massa e de rigidez.

Para um primeiro caso, será inserido um absorvedor no meio da ponte, e serão determinados os resultados com $\frac{1}{4}$ de carro passante e meio carro. Esses resultados serão comparados entre si e irá se buscar os melhores parâmetros para o absorvedor. Depois desta primeira determinação serão inseridos mais dois absorvedores na estrutura e todo o processo será refeito.

Após todos os valores serem levantados, será feita uma comparação e a maior absorção encontrada, com valores plausíveis de projeto, será utilizada para se iniciar o projeto do absorvedor.

O levantamento da absorção da vibração será feita por meio de uma equação que utiliza os valores da ponte sem absorvedor e com absorvedor, se tendo a porcentagem do quanto absorveu em relação a ponte sem o absorvedor. Essa porcentagem de absorção será chamada de fator de absorção.

$$\frac{\text{Deslocamento sem absorvedor} - \text{Deslocamento com absorvedor}}{\text{Deslocamento sem absorvedor}} \quad (6.1)$$

Para a comparação entre absorvedores se tomará os três primeiros valores de máximos da onda de vibração da ponte, que será medido no meio da ponte onde o deslocamento é máximo. Serão tomados os três primeiros picos, pois o resultado da absorção tendo só o primeiro ponto de máximo não iria ser suficiente para chegar a conclusões e a valores plausíveis de projeto.

6.1. Análise da vibração da ponte com um absorvedor dinâmico.

O programa foi executado diversas vezes, e a cada vez com alguns parâmetros diferentes, sendo eles a velocidade, a rigidez da mola do absorvedor e a massa do absorvedor. A cada vez que o programa era executado, ele gerava um gráfico, onde com os resultados do mesmo, se calculava o fator de amortecimento, que completava a tabela da combinação (veículo-carro-ponte) estudada no momento.

Para a velocidade foram estipulados três valores, que são uma estimativa da velocidade que os carros geralmente trafegam sobre uma ponte. Essas três velocidades foram: 40, 60 e 80 km/h. No caso da massa os valores estipulados foram de 1500, 2000, 2500 e 3000 kg, que são os valores vistos onde se tem a melhor absorção e que seja viável para a ponte suportar. E os valores de rigidez foram 8000, 9000, 10000, 11000 e 15000 N/m, onde seguindo o mesmo princípio dos valores da massa, é o intervalo de valores que melhor se obteve a absorção.

Esses valores foram testados de várias combinações diferentes, ora variando só a massa, ora só a rigidez e ora só a velocidade, buscando assim o melhor resultado para o projeto.

6.1.1. Com um quarto de carro passante (várias velocidades)

De acordo com as tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 e com a figura 6.1, é possível analisar a porcentagem de absorção de cada teste, no caso de um quarto de carro passante (figura 6.2) e um absorvedor. Nessas tabelas estão indicados os resultados obtidos após os testes no MatLab, correlacionando assim as três variáveis (v , k e m)

Em cada tabela se encontram 3 valores para cada correlação, esses valores são o resultado obtido pelo gráfico, referente ao pico das três primeiras ondas, podendo se analisar quanto está se absorvendo em cada momento da vibração.

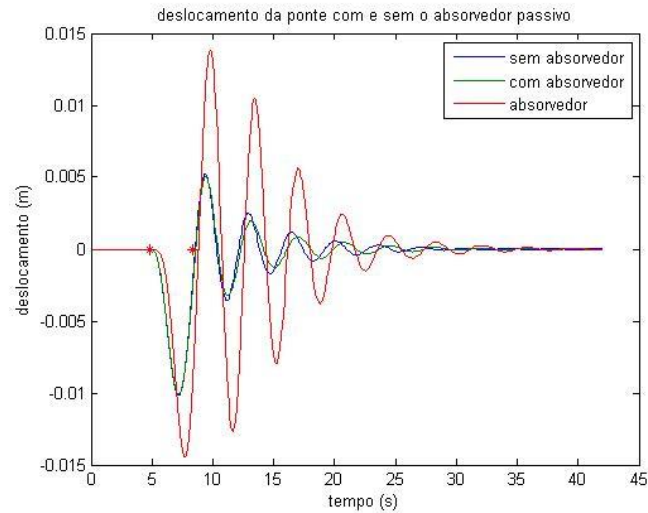


Figura 6. 1: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor com um quarto de carro passante e um absorvedor.
 $k=11000$, $m=3000$, $v=60$

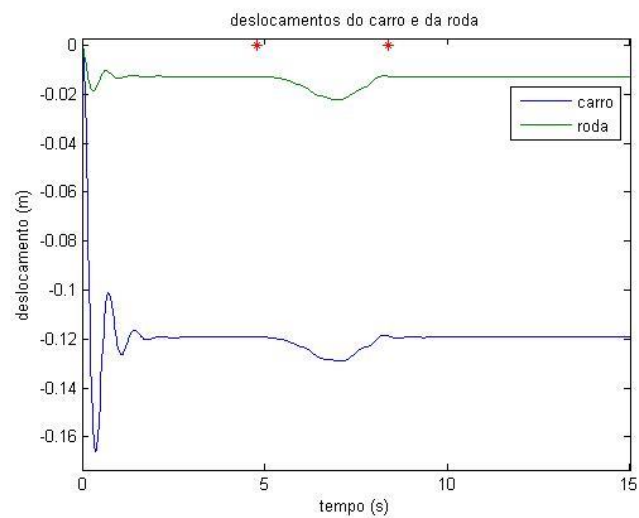


Figura 6. 2: Deslocamento do carro e da roda com um quarto de carro passante e um absorvedor $k=11000$,
 $m=3000$, $v=60$

• 40 KM/H

Tabela 6. 1: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 40km/h, com um absorvedor.

		K (N/m)														
		8000			9000			10000			11000			15000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	1500	-1,09	5,03	2,49	-0,07	3,53	0,44	0	1,77	0	0,65	0,76	0,6	0,65	-0,18	0,12
	2000	-7,41	1,88	18,62	-4,21	6,09	12,99	-2,69	6,69	5,5	-1,23	5,45	1,66	0,5	0,67	0,41
	2500	-14,76	-10,25	16,51	-12,14	-4,21	21,63	-9,38	2,4	22,8	-6,9	6,52	14,94	-0,72	4,07	-0,16
	3000	-20	-14,59	25,79	-18,54	-14,51	19,74	-16,5	-9,96	22,2	-14,03	-3,58	25,34	-4,87	8,54	4,32

• 60 KM/H

Tabela 6. 2: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 60km/h, com um absorvedor.

		K(N/m)														
		8000			9000			10000			11000			15000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	1500	0	1,49	-0,08	-0,44	0,12	-1,27	-0,77	-0,36	-1,61	-0,96	-0,81	-1,69	-1,19	-1,29	-1,86
	2000	1,79	10,64	14,48	1	6,12	4,91	0,33	3,1	0,51	-0,19	1,17	-0,85	-1,19	-1,33	-2,2
	2500	3,84	24,38	52,37	3,17	18,17	30,68	2,17	12,57	15,16	1,36	7,9	6,18	-0,79	0,24	-1,69
	3000	5,63	35,21	81,09	5,05	31,67	70,68	4,21	25,91	46,39	3,42	19,82	27,86	0,4	3,67	0

• 80 KM/H

Tabela 6. 3: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 80km/h, com um absorvedor.

		K(N/m)														
		8000			9000			10000			11000			15000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	1500	2,25	4,31	1,18	2,02	2,03	0,52	1,41	1,03	0,2	1,15	0,34	0	0,33	-0,12	-0,66
	2000	4,34	16,27	20,34	3,85	11,15	8,4	3,42	7,06	2,95	2,91	4,21	1,05	1,35	0,31	-0,07
	2500	5,67	28,97	61,2	5,44	24,82	38,7	5,21	19,42	21,39	4,83	14,27	10,56	2,96	2,72	0,85
	3000	6,68	35,12	74,1	6,48	35,56	79,59	6,72	32,81	56,43	6,44	27,69	36,09	5	9,09	3,15

6.1.2. Com meio carro passante

De acordo com as tabelas 6.4, 6.5 e 6.6 e com a figura 6.3, é possível analisar a porcentagem de absorção de cada teste, no caso de meio carro passante (figura 6.4) e um absorvedor. Nessas tabelas estão indicados os resultados obtidos após os testes no MatLab, correlacionando assim as três variáveis (v , k e m).

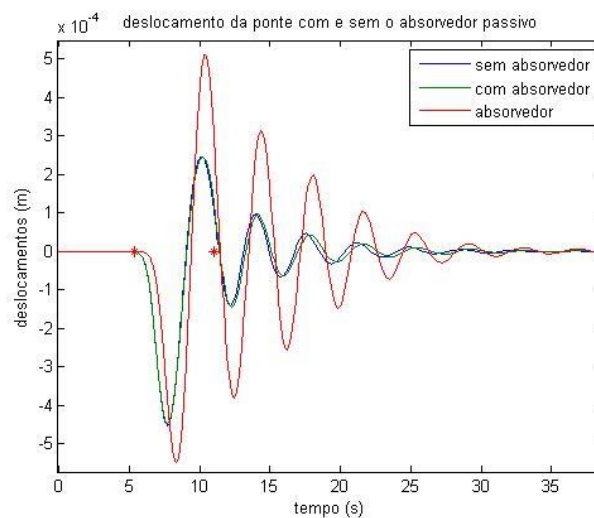


Figura 6. 3: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor com meio carro passante e um absorvedor, $k=11000$, $m=3000$, $v=40$

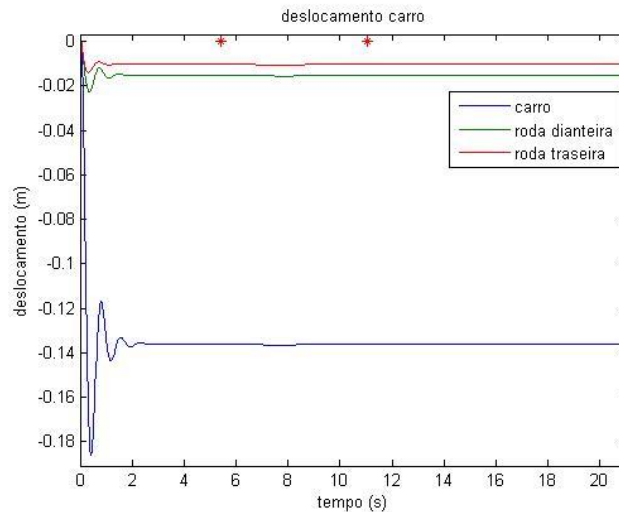


Figura 6. 4: Deslocamento do carro e da roda com meio carro passante e um absorvedor, $k=11000$, $m=3000$, $v=40$

• 40 KM/H

Tabela 6. 4: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 40km/h, com um absorvedor.

		K(N/m)														
		8000			9000			10000			11000			15000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	1500	-1,3	-4,02	0,28	-1,63	-2,94	-0,49	-1,83	-2,8	-1,22	-1,95	-3,02	-0,45	-1,87	-2	-0,6
	2000	-0,2	-2,78	3,5	-0,85	-4,75	0,68	-1,3	-4,75	-0,98	-1,71	-4,75	-1,92	-2,56	-3,45	-2,88
	2500	1,26	5,58	25,41	0,45	1,25	11,88	-0,28	-3,37	3,89	-0,98	-4,65	0,56	-2,68	-4,96	-3,46
	3000	2,68	17,02	55,11	1,95	10,12	39,12	1,46	4,85	22,59	0,28	0,03	11,28	-2,24	-6,62	-1,5

• 60 KM/H

Tabela 6. 5: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 60km/h, com um absorvedor.

		K(N/m)														
		8000			9000			10000			11000			15000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	1500	1,88	4,83	3,78	1,68	2,89	1,83	1,61	1,73	2,43	1,26	1,42	0,94	0,68	0,74	1,36
	2000	2,96	13,4	21,15	2,86	10,25	10,93	2,64	7,72	6,08	2,59	5,25	3,53	1,56	1,79	1,2
	2500	3,64	20,65	49,31	3,72	19,18	39,06	3,64	16,71	23,77	3,51	13,14	14,45	2,74	4,78	2,6
	3000	4,07	23,23	53,07	4,29	24,91	60,07	4,39	24,38	52,15	4,44	22,07	38,48	4,07	10,51	6,56

• 80 KM/H

Tabela 6. 6: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 80km/h, com um absorvedor.

		K(N/m)														
		8000			9000			10000			11000			15000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	1500	3,05	5,89	3,65	2,58	3,65	1,81	2,47	3,34	1,69	2,32	1,34	2,05	1,6	0,85	1,99
	2000	3,6	15,67	23,97	3,71	12,7	12,88	3,66	9,42	6,97	3,63	6,62	5,47	2,99	2,49	3,5
	2500	3,89	22,05	52,38	4,15	21,51	41,31	4,5	19,26	27,07	4,47	16,1	15,77	4,32	5,77	2,84
	3000	4,32	22,9	50,41	4,61	25,64	61,24	4,96	26,18	56,66	5,02	25,21	42,6	5,43	13,12	6,99

Tanto para o caso de um quarto de carro como para o caso do meio carro, a absorção não foi tão elevada, pois como a excitação na ponte é rápida e momentânea (o período de tempo do veículo passando pelo vão), o absorvedor não dispõe de um período de tempo elevado e esse fato gera inclusive uma diminuição no tamanho da excitação na ponte, acarretando em uma menor eficiência do absorvedor.

No caso do projeto dos absorvedores da ponte Rio-Niterói (BATTISTA, 1997), que está sendo utilizado como uma das referências para o presente trabalho. Foi considerado até a força vinda do vento, que no caso da ponte, era quando ela mais vibrava e sendo o fato que gerou e justificou o projeto na ponte Rio-Niterói.

6.2. Análise da vibração da ponte com três absorvedores dinâmicos

Com o objetivo de adquirir melhores resultados, será feito também o estudo com três absorvedores dinâmicos na ponte, sendo instalado um no nó central, e os outros dois, nos nós adjacentes.

Os mesmos cálculos feitos para o caso de apenas um absorvedor foram feitos para o caso com três, porém com valores de massa e rigidez diferentes, com outros intervalos. Para a constante de rigidez da mola (K) foram usados os valores de 4000, 5000 e 6000 N/m. Já para a massa foram utilizados os valores de 750, 1000 e 1500 kg. O intervalo de valores para a velocidade foi mantido.

Para o caso dos três absorvedores foi escolhido um intervalo de valores menor, afim de deixar as tabelas menos carregadas.

6.2.1. Com um quarto de carro passante

De acordo com as tabelas 6.7, 6.8, e 6.9 e figura 6.5, é possível analisar a porcentagem de absorção de cada teste, no caso de um quarto carro passante (figura 6.6) e três absorvedores. Nessas tabelas estão indicados os resultados obtidos após os testes no MatLab, correlacionando assim as três variáveis (v , k e m).

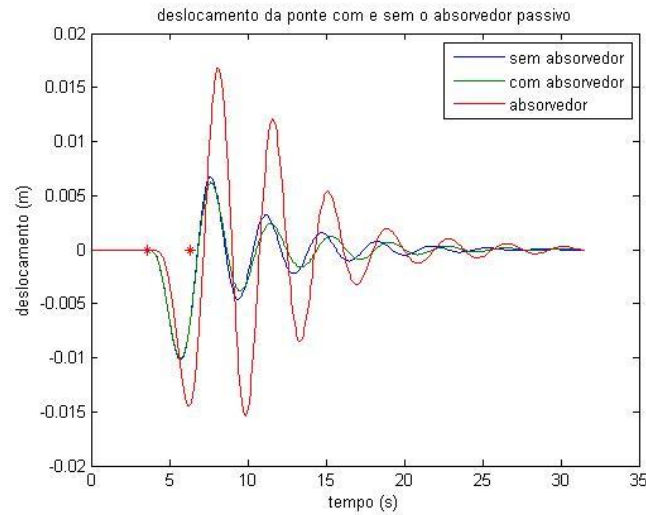


Figura 6. 5: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor, com um quarto de carro passante e três absorvedores, $k=6000$, $m=1500$, $v=80$

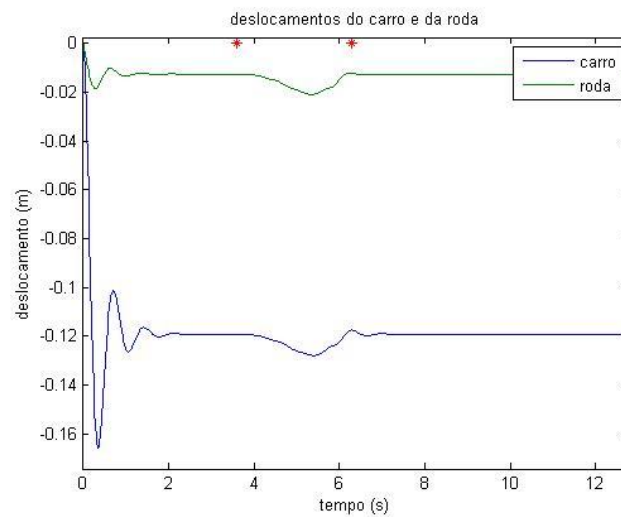


Figura 6. 6: Deslocamento do carro e da roda, com um quarto de carro passante e três absorvedores, $k=6000$, $m=1500$, $v=80$

- **40 km/h**

Tabela 6. 7: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 40km/h, com três absorvedores

		K(N/m)								
		4000			5000			6000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	750	-1,455	5,711	2,912	0,291	1,853	0,192	0,509	0,26	0,608
	1000	-9,018	2,542	21,472	-3,491	7,763	5,216	-0,509	4,058	-0,128
	1500	-24,073	-15,235	36,16	-20,145	-9,753	29,504	-13,964	3,246	23,808

- **60 km/h**

Tabela 6. 8: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 60km/h, com três absorvedores

		K(N/m)								
		4000			5000			6000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	750	0,019	1,894	-0,593	-0,883	-0,645	-1,948	-1,248	-1,37	-1,863
	1000	2,209	12,812	15,834	0,461	3,465	1,016	-0,691	0,121	-1,609
	1500	7,01	42,99	66,384	5,224	30,782	45,131	3,265	16,156	13,802

- **80 km/h**

Tabela 6. 9: Porcentagem de absorção de um quarto de carro passante a 80km/h, com três absorvedores

		K(N/m)								
		4000			5000			6000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	750	2,87	5,339	1,378	1,948	0,999	0,525	1,175	0,25	-0,262
	1000	5,354	19,544	21,588	4,12	8,336	3,018	3,049	2,716	0,722
	1500	8,299	43,053	85,958	8,328	39,369	54,724	7,629	25,726	20,013

6.2.2. Com meio carro passante

De acordo com as tabelas 6.10, 6.11 e 6.12 e a figura 6.7, é possível analisar a porcentagem de absorção de cada teste, no caso de meio carro passante (figura 6.8) e três absorvedores. Nessas tabelas estão indicados os resultados obtidos após os testes no MatLab, correlacionando assim as três variáveis (v , k e m).

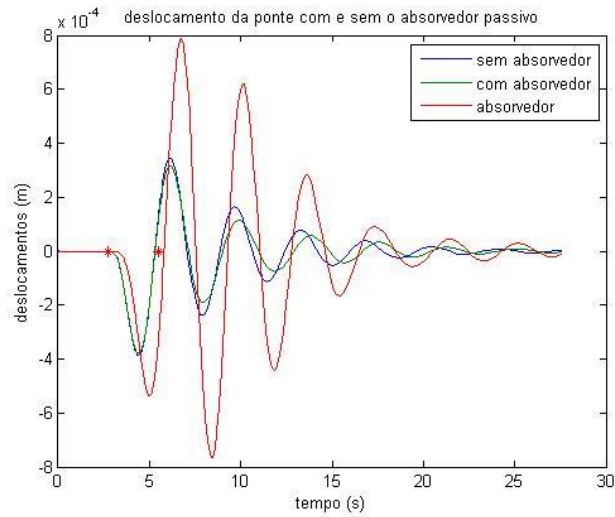


Figura 6. 7: Deslocamento da ponte com e sem absorvedor, com meio carro passante e três absorvedores, $k=6000, m=1500, v=80$

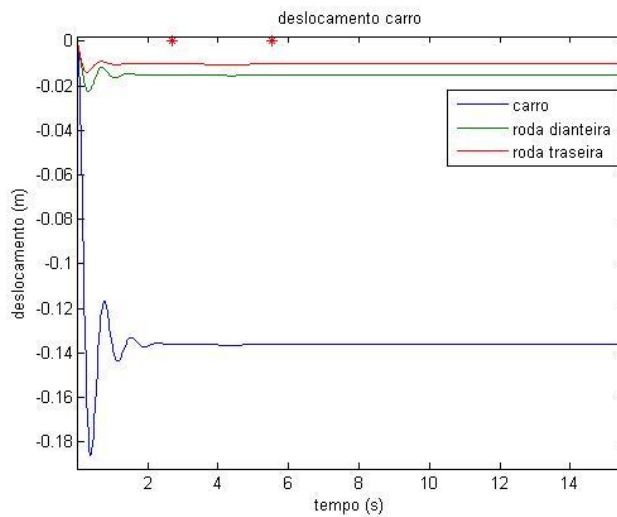


Figura 6. 8: Deslocamento do carro e da roda, de meio carro passante e com três absorvedores, $k=6000, m=1500, v=80$

• 40 KM/H

Tabela 6. 10: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 40km/h, com três absorvedores

		k(N/m)								
		4000			5000			6000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	750	-2,765	-6,204	-3,141	-3,457	-4,333	-5,299	-3,416	-5,165	-5,406
	1000	-1,301	-5,684	2,244	-3,294	-7,659	-3,462	-4,229	-6,723	-6,197
	1500	3,335	22,353	73,782	0,366	1,715	21,303	-2,277	-7,97	1,774

- **60 KM/H**

Tabela 6. 11: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 60km/h, com três absorvedores

		K(N/m)								
		4000			5000			6000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	750	2,586	6,201	3,139	1,908	2,049	2,745	1,456	0,998	1,4
	1000	4,343	19,023	24,85	3,666	9,564	5,469	2,887	4,309	2,953
	1500	6,553	36,942	79,525	6,804	35,891	59,237	6,402	26,064	25,101

- **80 KM/H**

Tabela 6. 12: Porcentagem de absorção de meio carro passante a 80km/h, com três absorvedores

		K(N/m)								
		4000			5000			6000		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
M(kg)	750	3,947	8,384	5,668	3,424	3,402	3,32	2,815	1,397	2,437
	1000	5,456	23,026	28,393	5,311	12,758	7,019	4,933	6,015	3,371
	1500	6,645	36,634	73,955	7,632	40,34	64,588	8,009	31,713	28,052

As porcentagens no caso de três absorvedores não foram mais elevadas que no caso de apenas um absorvedor, se obtendo inclusive valores bem próximos. Contudo, o caso com três absorvedores se torna mais adequado, pois facilita a escolha dos valores de projeto, como material, tornando-o assim mais viável.

7. PROJETO DO ABSORVEDOR DINÂMICO

7.1. Definição dos parâmetros

Nesse projeto, será feita a utilização de 3 absorvedores dinâmicos, um no vão central da ponte, e os demais, nos 2 nós adjacentes.

Com todos os valores da porcentagem de absorção, é preciso calcular o valor do deslocamento L_e estático dessa massa no absorvedor, pois é necessário para os cálculos da mola e para que o absorvedor não tenha um tamanho excessivamente grande. Esse valor é achado através da seguinte equação:

$$L_e = \frac{M \times 9,81}{K} \quad (7.1)$$

Assim, pode se obter o deslocamento estático de cada um dos testes, conforme a tabela 7.1 abaixo:

Tabela 7. 1: Deslocamento estático

M (kg)	K(N/m)		
	4000	5000	6000
750	1,839375	1,4715	1,22625
1000	2,4525	1,962	1,635
1500	3,67875	2,943	2,4525

O primeiro passo para se calcular o absorvedor adequado, é escolher qual K e M deverão ser utilizados. Para isso, é preciso levar em consideração a porcentagem de absorção, o alongamento estático L_e , a massa M e a constante K . É necessário procurar uma opção que tenha uma absorção considerável, porém, um alongamento estático L_e baixo.

Analisando todas as opções, foi escolhido, para o estudo desse projeto a constante de 6.000 N/m com uma massa de 1500 kg, fornecendo um L_e de 2,45 metros, e uma absorção que pode chegar a 28%. Já a ponte, tem uma deflexão máxima de 0,138 metro.

7.2. Projeto da mola

Para calcular a mola é necessário achar as características como diâmetro da mola, diâmetro da espira, a quantidade de espiras, a força que a mola precisa suportar e etc.

Deve-se primeiramente, fixar o valor de D e d como indicado na figura 7.1 abaixo:

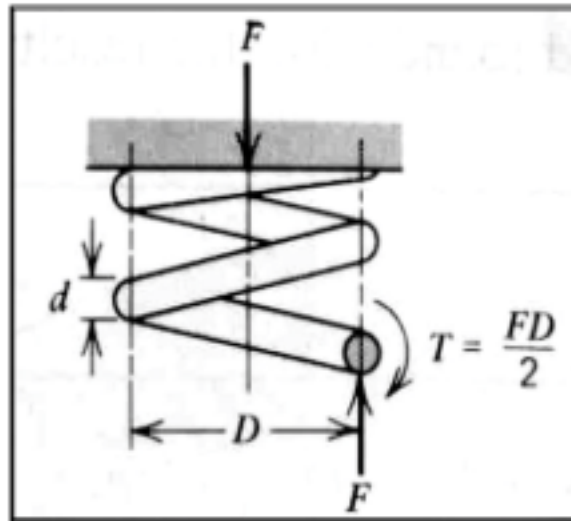


Figura 7. 1: Parâmetros da mola

Para esse estudo, foi escolhido um $D = 15$ cm e $d = 1,4$ cm.

Para o projeto de uma mola, é necessário calcular C_m (D/d) e K_w , que é o fator Wahl utilizado para solicitações variáveis.

$$K_w = \frac{4 \times C_m - 1}{4 \times C_m - 4} + \frac{0,615}{C_m} \quad (7.2)$$

$$K_w = 1,34 \quad (7.3)$$

Também é preciso do G (Módulo de rigidez) e E (Módulo de elasticidade) cujos valores são $79,3 \times 10^9$ e 207×10^9 respectivamente.

Após a escolha desses valores, é preciso decidir a quantidade de molas necessárias em cada absorvedor. Nesse estudo, serão utilizadas 8 molas em cada dispositivo de absorção. Essa escolha foi feita devido ao alto valor da massa instalada no absorvedor.

Tem-se que a constante do absorvedor é de 6.000 N/m. Para saber o valor da constante k de cada mola, é necessário dividir esse valor pelo número de molas, então:

$$k = \frac{K}{8} \quad (7.4)$$

Sabendo o valor de k , é preciso calcular a força que cada mola vai sofrer. Para isso, multiplica-se a variação de alongamento $\Delta L_e \times k$, ΔL_e é o somatório do alongamento estático L_e com o deslocamento sofrido pela ponte, nesse caso, 0,138 m.

Então, $\Delta L_e = 2,46$ m.

Assim,

$$F = \Delta L_e \times k \quad (7.5)$$

Cada mola irá sofrer uma força igual a 1846,875 N.

Devemos também calcular a tensão cisalhante de torção que cada mola vai sofrer, através da fórmula:

$$\tau = \frac{8 \times F \times D}{\pi \times d^3} K_w \quad (7.6)$$

Com esses dados, o valor da tensão é de: $\tau = 238 \times 10^6$ Pa.

Em seguida, é preciso calcular o número de espiras N que ele deve possuir. Para calcular o número de espiras que sofrem deformação, usa-se a fórmula:

$$N = \frac{G \times d^4}{8 \times k \times D^3} \quad (7.7)$$

Tendo como resultado 151 (150,43) espiras, sendo assim, o tamanho final mínimo do absorvedor será de: $151 \times d + 2,46 = 4,57$ metros.

Apos todos esses valores finalizados, é preciso levar em consideração um critério de falha. São duas opções a serem consideradas: O critério de *Von Mises* e o critério de *Tresca*.

Para esse projeto, foi escolhido *Tresca* devido a incerteza da construção do projeto, por alguma razão o material pode ter algum defeito de fabricação ou alguma irregularidade. Usando esse critério, ele cobre as possíveis incertezas do material, sendo assim, um critério mais abrangente.

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau \quad (7.8)$$

$\sigma_e = \sigma_1 + \sigma_2$, então, o valor da tensão de acordo com *Tresca* é de $583,68 \times 10^6$ Pa.

Porém, é necessário levar em consideração um coeficiente de segurança. Usando esse fator de 1,5 a tensão ficará sendo de $875,52 \times 10^6$ Pa. Isso significa que o material escolhido precisa ter um coeficiente de escoamento de no mínimo 876×10^6 Pa para não haver deformação plástica e por fim ruptura.

Escolheu-se então o aço SAE 5160, com limite de escoamento de 930×10^6 Pa.

Além de todos esses cálculos para a escolha de todos os parâmetros da mola, é preciso pensar também na conexão adequada da mola na estrutura do absorvedor, e também na massa que irá ficar suspensa.

Para isso, foi escolhido o tipo de conexão na extremidade da mola como mostrada na figura 7.2, onde a mesma irá possuir ganchos de sustentação.

Esse tipo de extremidade é ideal para casos de tração elevada.

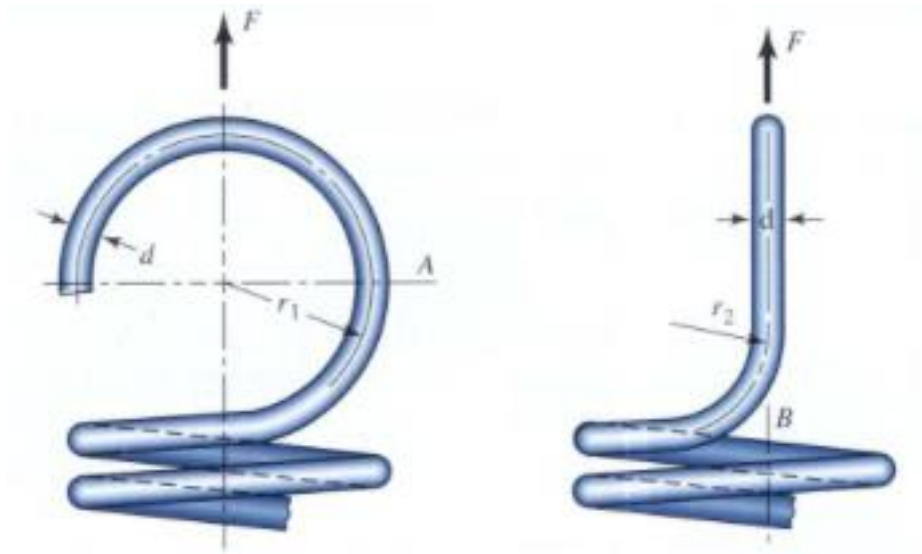


Figura 7. 2: Escolha do gancho da mola

As forças em A e em B são determinadas em função dos valores de r_1 e r_2 .

Normalmente esses valores são calculados pelo fabricante da mola, uma vez dados todos os parâmetros necessários. Será visto aqui uma aproximação de acordo com material técnico sobre o assunto, então, será escolhido para r_1 o valor de $D/2$, ou seja, de 7,5 cm. Já para r_2 , um valor de 87% de D , ou seja, 6,4 cm. Assim, pode-se achar valor das forças em A e B .

Para calcular as forças de tensão A e de cisalhamento B , é preciso utilizar as seguintes formulas:

$$C_{m1} = \frac{2r_1}{d} = \frac{2 \times 7,5}{1,4} = 10,71 \quad (7.9)$$

$$C_{m2} = \frac{2r_2}{d} = \frac{2 \times 6,4}{1,4} = 9,14 \quad (7.10)$$

$$K_a = \frac{4C_1^2 + C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = 0,247 \quad (7.11)$$

$$K_b = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = 1,09 \quad (7.12)$$

$$\sigma_a = F \left[\frac{K_a 16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2} \right] = 138,99 \text{ MPa} \quad (7.13)$$

$$\tau_b = \frac{K_b 8FD}{\pi d^3} = 280,22 \text{ MPa} \quad (7.14)$$

Assim como a tensão cisalhante de torção, é preciso utilizar o critério de falhas de *Tresca* para σ_a e para τ_b , para se ter certeza que o material aguentará as demandas de força.

Com esse critério de *Tresca*,

$$\sigma_a = 277,98 \text{ MPa} \quad (7.15)$$

$$\tau_b = 560,44 \text{ MPa} \quad (7.16)$$

Ambos muito abaixo da tensão de escoamento do material escolhido.

Porém, é preciso estudar também aonde esse gancho será preso na estrutura. A melhor forma pra fazer essa conexão é usar um olhal como o da figura 7.3

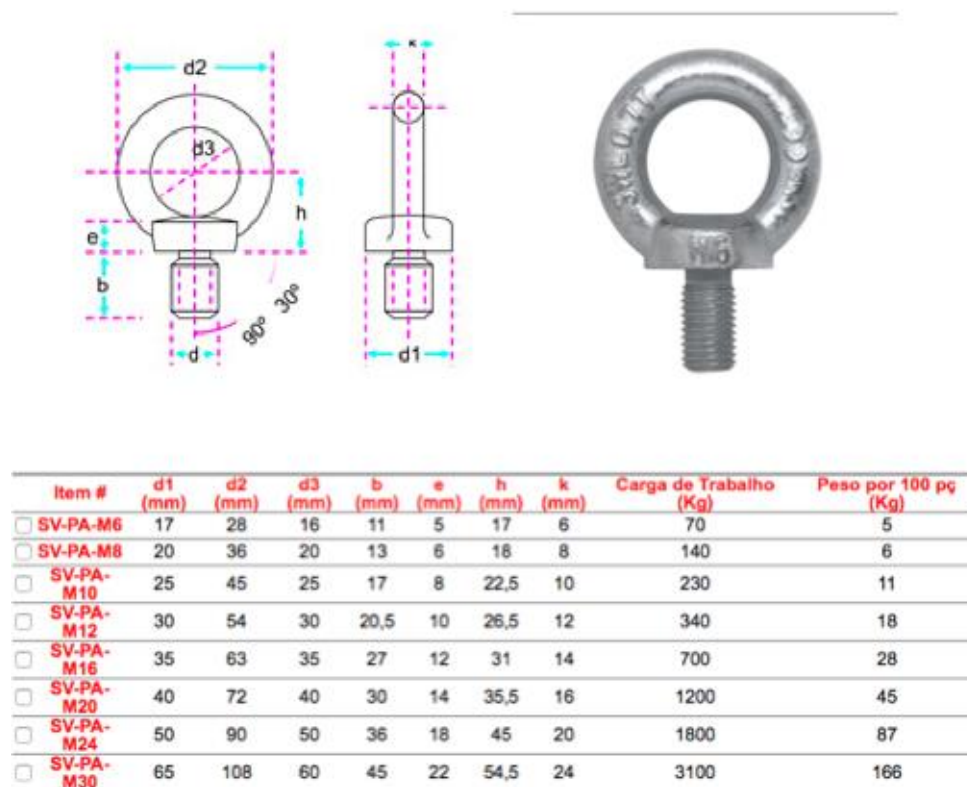


Figura 7. 3: Escolha do olhal

Esse dispositivo será instalado na parte inferior da estrutura da ponte, assim como na massa, permitindo assim sua fixação.

A melhor escolha será a SV-PA-M12 como mostra a figura acima, pois assim terá um coeficiente de segurança adequado de acordo com os esforços sofridos.

7.3. Projeto da massa

A massa será um bloco de aço carbono estrutural de densidade 7850 kg/m^3 com comprimento de 264 mm, altura de 482 mm e largura de 1500 mm e que terá os olhais fixos a ela, como mostra a figura 7.4 e 7.5, onde as molas irão ser conectadas. Essa massa irá correr livremente por canaletas fixas na estrutura, não permitindo outro movimento se não o vertical.

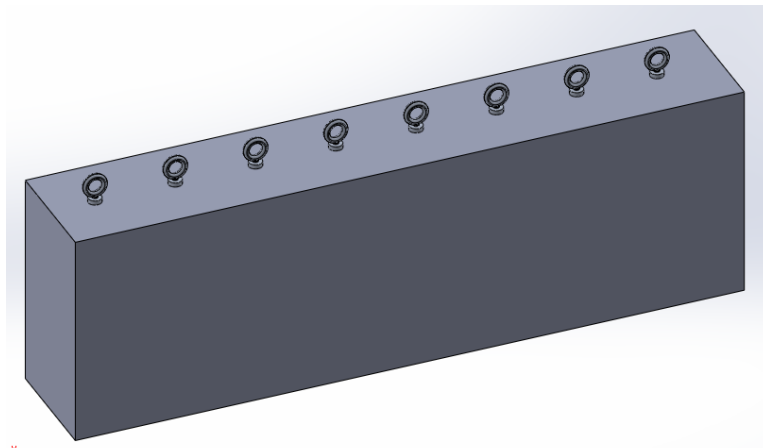


Figura 7. 4: Desenho da massa com os olhais 264 x 482 x 1500 mm.

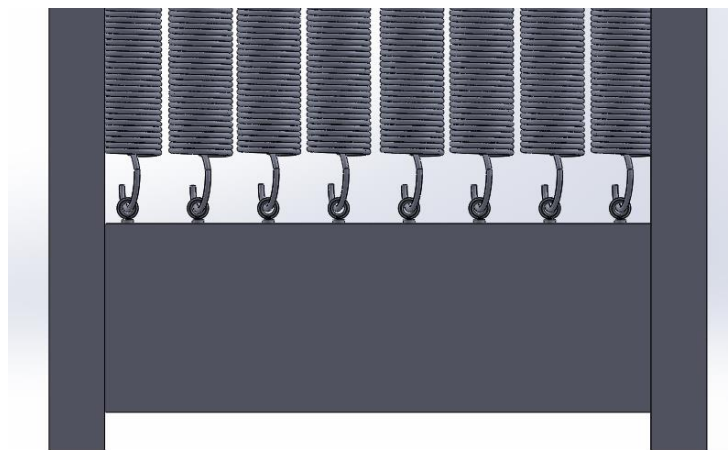


Figura 7. 5: Desenho da massa com os olhais

7.4. Projeto da estrutura

Para o projeto da estrutura, se foi pensado na forma mais simples e prática de fixação e funcionamento, visando uma facilidade maior numa possível instalação.

Por este motivo, se optou em fixar diretamente os olhais na viga da ponte onde serão presas as molas.

Serão consideradas duas vigas de aço estrutural de perfil “I”, conforme a figura 7.6, como guias para a massa, elas serão fixas na estrutura da ponte por meio de parafusos M16 de acordo na figura 7.7, essas vigas são de perfil comercial e tem como dimensões transversais: 142,24 mm de largura, 304,8 mm de altura, 5180 mm de comprimento e 20,57 mm de espessura, tais dimensões permitirão a massa correr livremente em seu interior. Na parte inferior dessas vigas, será fixada uma barra de perfil “U” como consta na figura 7.8, de dimensões transversais de: 304,8 mm de largura, 86,74 mm de altura, 1740 mm de comprimento e 19,18 mm de espessura, garantindo com que a estrutura do absorvedor tenha uma maior rigidez. Essa viga em “U” será fixada na viga em “I” por meio de parafusos M16, como mostrado na figura 7.9.

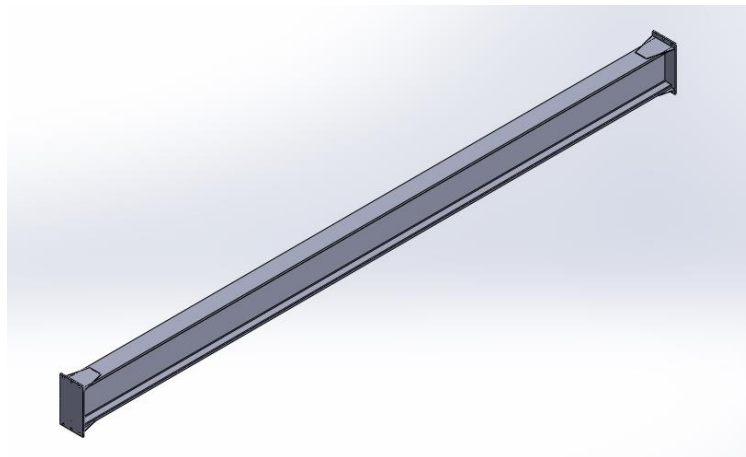


Figura 7. 6: Representação da viga em “I”

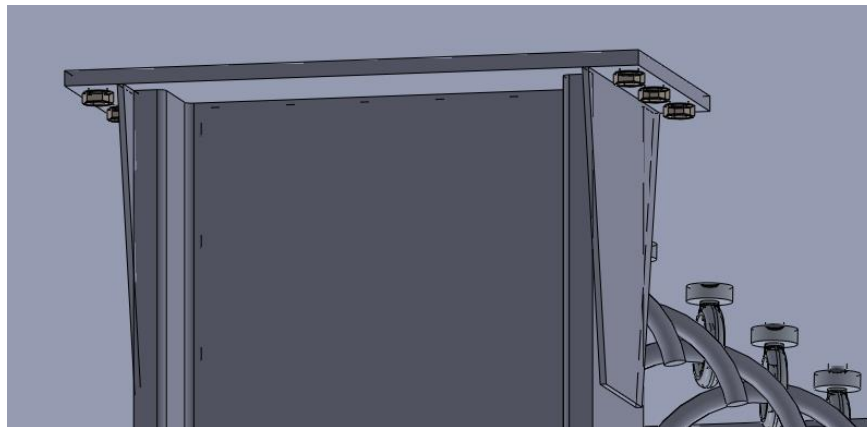


Figura 7. 7: Conexão viga em “I”-Ponte

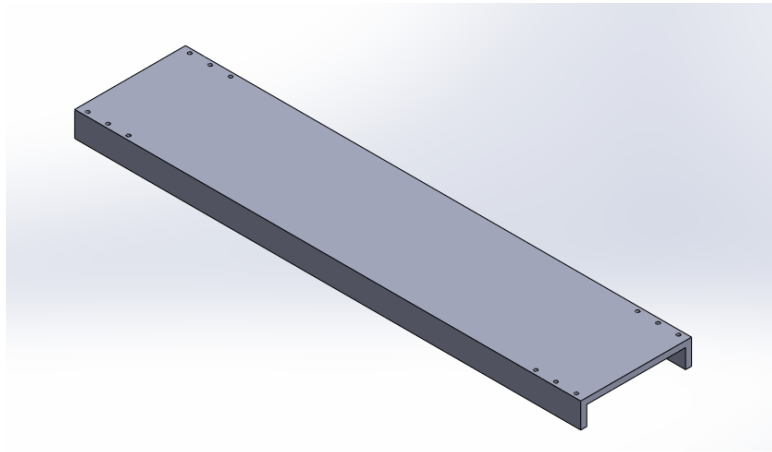


Figura 7. 8: Representação da viga em “U”

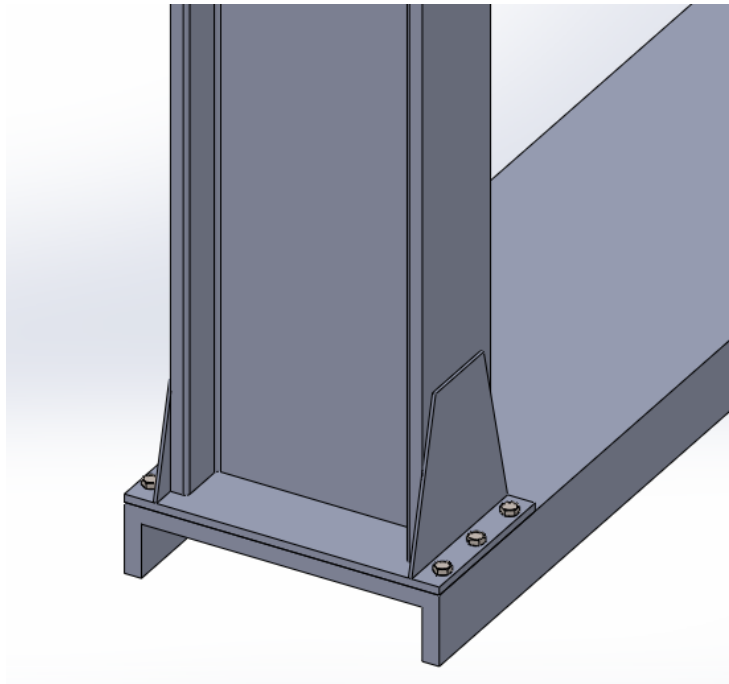


Figura 7. 9: Conexão vigas “I”-“U”

Pelo fato da massa estar sendo amparada por uma canaleta, podemos considerar que as molas não sofrerão flambagem ou qualquer outro tipo de força diferente das consideradas, já que a estrutura do absorvedor é fixa. Por esse motivo o movimento da massa e das molas é limitado somente ao movimento vertical. As figuras 7.10, 7.11 e 7.12 mostra como o projeto do absorvedor dinâmico foi idealizado e como o conjunto ficará com os 3 absorvedores em posição.

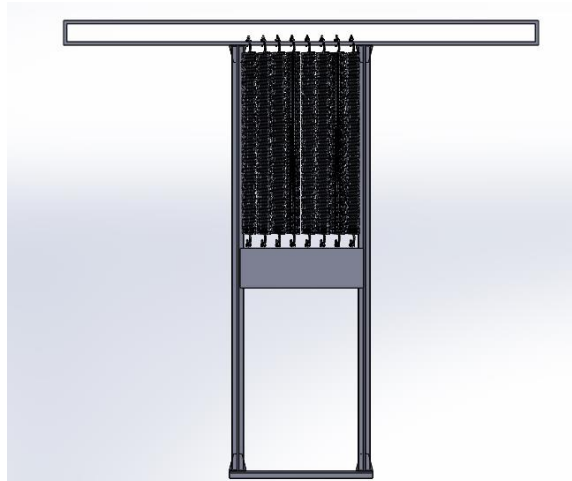


Figura 7. 10: Absorvedor – Ponte, vista frontal

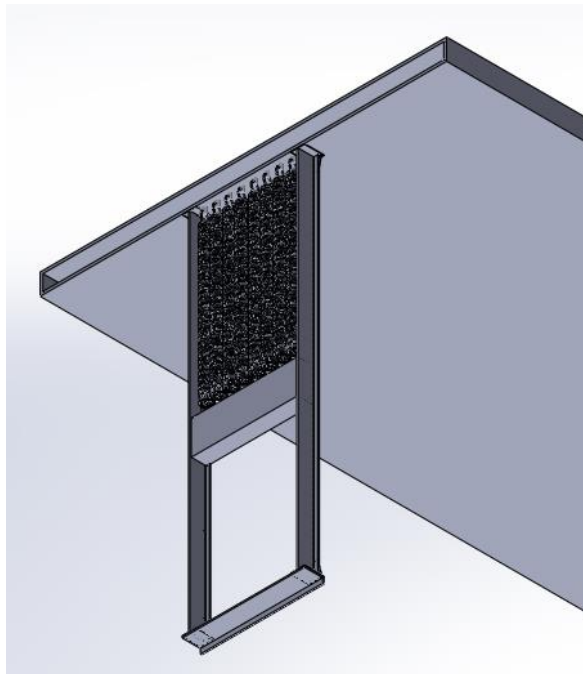


Figura 7. 11: Vista em corte da perspectiva Absorvedor-Ponte

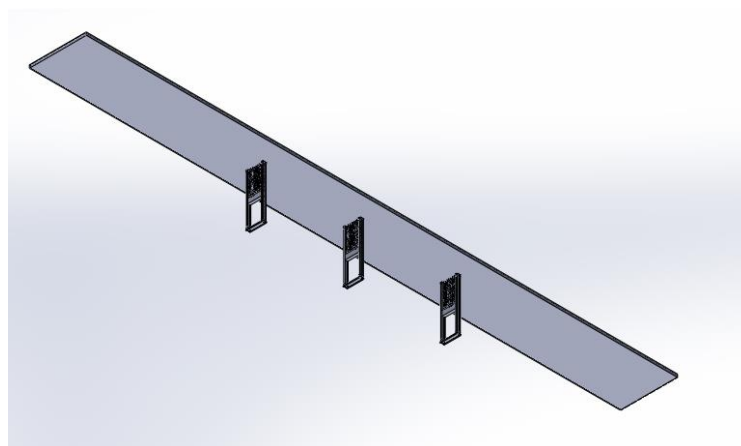


Figura 7. 12: Vista em perspectiva, absorvedores-Ponte

8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

8.1. Conclusões

O objetivo nesse projeto foi de analisar a diferença da absorção de vibração quando absorvedores dinâmicos são utilizados em estruturas flexíveis, como uma ponte.

Inicialmente, apresentou-se os modelos de carro utilizados, o de um quarto de carro com dois graus de liberdade e duas massas (a do veículo e a da roda), e o modelo de meio carro, com quatro graus de liberdade, possuindo três massas (a do veículo e a das duas rodas). Para esse estudo, foram utilizados alguns fatores essenciais para os cálculos, tais como a inércia, rigidez e o amortecimento.

Em paralelo, foi preciso desenvolver o modelo da estrutura da ponte. Essa estrutura foi modelada com sete nós, ou seja, quatorze graus de liberdade, porém, como a ponte pode ser considerada uma viga bi-apoiada, exclui-se dois graus de liberdade, pois são os apoios da viga.

Primeiramente, foi observado como cada sistema se comportava separadamente, para se ter uma certeza do correto funcionamento dos modelos de $\frac{1}{4}$ de carro, de $\frac{1}{2}$ carro e da ponte. Após essa análise, os modelos foram juntados, para poder assim verificar a interação veículo-ponte, e observar suas vibrações. Unindo todos os elementos, os deslocamentos, que são associados aos graus de liberdade do veículo, são integrados no sistema dinâmico a estrutura.

Posteriormente, o absorvedor dinâmico foi incorporado a estrutura veículo-ponte, permitindo assim, analisar a porcentagem de absorção das vibrações. O estudo foi feito com um e três absorvedores

Foi analisado o caso do modelo de dois e quatro graus de liberdade massa-mola com diversas velocidades sobre a ponte, para poder ter resultados mais assertivos.

Todo o desenvolvimento dos modelos foi feito pelo software MatLab, e de todos os resultados obtidos, pode se destacar as seguintes conclusões:

O modelo de massa-mola de 4 graus de liberdade (meio carro) apresenta características mais próximas à realidade.

A resposta dos veículos passando sobre a ponte nas diversas velocidades apresentadas representa bem o que se previa da solução.

O amortecimento da ponte e do veículo devem ser considerados desde o princípio, pois têm influência direta na amplitude do deslocamento vertical da ponte.

O uso de apenas um absorvedor dinâmico na estrutura fornece uma porcentagem

de absorção muito alta das vibrações, porém, não é a melhor opção a ser usada, já que com suas variáveis, seria inviável escolher um material que suportasse a massa.

O uso de três absorvedores não fornece uma absorção muito maior que com um único, porém, é o suficiente para obter diferenças consideráveis na vibração da ponte. Com o uso de mais de um absorvedor, é possível mesclar as variáveis e obter um resultado onde satisfaça a absorção de vibração, número de espiras, deslocamento da massa do absorvedor e do material da mola.

O resultado obtido foi satisfatório, porém, ainda é distante da realidade, já que nesse projeto é analisado apenas um veículo por vez e a única força sobre a ponte que é considerada é a do veículo. Os resultados seriam mais próximos da realidade se um comboio fosse utilizado e se considera-se as forças externas como a do vento.

Com o comboio e com as forças externas sendo consideradas a intensidade da vibração seria maior e o tempo de permanência dessas vibrações também seria maior, sendo melhor para o funcionamento do absorvedor dinâmico e proporcionando assim uma maior absorção.

No projeto da ponte Rio-Niterói (BATTISTA, 1997), foi utilizado um número muito maior de absorvedores, um total de 32, e foi considerada a força do vento, que era a grande causadora da elevada vibração no vão central da ponte. Sendo feita uma comparação entre o projeto da ponte e o presente projeto, nota-se valores próximos frente a estrutura do absorvedor, porém, uma diferença grande nos valores de absorção, muito devido a elevada quantidade de absorvedores na ponte e uma maior gama de variáveis consideradas.

8.2. Sugestões para trabalhos futuros

Ao finalizar esse projeto, observa-se que ainda muitos pontos podem ser melhorados e muitos assuntos ainda podem ser abordados, tais como:

- Fazer o estudo de um carro completo, levando-o mais perto da realidade (8 DGL's);
- Levar em consideração as irregularidades tridimensionais na ponte e nas rodas;
- Implementar não só um carro passando, mas sim diversos veículos um após o outro como um comboio;
- Aumentar a gama de velocidades estudadas, para atingir diferentes níveis de vibrações e respostas do sistema;

- Implementar um número maior de absorvedores dinâmicos, também mudando os tamanhos e modelos dos mesmos;
- Aumentar os números de nós na ponte para atingir um valor mais próximo da realidade, podendo ser utilizado um método mais refinado de elementos finitos na ponte.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AYRE, R. S., FORD, G. and JACOBSEN, L. S. *Transverse Vibration of a Two Span Beam under Action of a Moving Constant Force*. 1950. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 17, pp.1-12, 1950.

BATTISTA, R.C. et all, *Análise global do comportamento estrutural dos vãos centrais da Ponte Rio-Niterói*. Contrato PONTE S.A, Relatório Técnico, Vol.3, ET-150747 COPPETEC, Rio de Janeiro, Novembro 1997.

BATTISTA, R.C. et all, *Múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados para controle das oscilações induzidas pelo vento na Ponte Rio-Niterói*. Instituto COPPE – UFRJ, Rio de Janeiro, 2004. .

BRANCO, D. B. M, C. *Análise de desempenho da suspensão e conforto de um veículo fora de estrada do tipo baja SAE*. 2014. 119f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2014.

BUARQUE, F.N. *Análise de desempenho de um sistema de suspensão para um veículo offroad do tipo baja*. 2004. 125f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2004.

CAMPOS, D. e SOUZA, M. C. *Análise da Dinâmica Vertical de Veículos Pesados Flexíveis*. 2014. 109f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2014.

CARNEIRO, R. J. F. M. *Análise de Pontes Rodoviárias sob a Ação de Cargas Móveis* - 1986. PUC-Rio - Tese de Mestrado, RJ, 1986.

CARVALHO, T. A. e MANZON, F. S. *Projeto de uma suspensão automotiva tipo duplo A para um veículo fora de estrada*. 2013, 92f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2013.

CHANG, D. and LEE, H. *Impact Factors for Simple-Span Highway Girder Bridges*. 1994. ASCE, J. Struc. Engr., Vol.120, n°3, pp.704-715, 1994.

COLEÇÃO SCHAUM, *Elementos Orgânicos de Máquinas*. McGraw-Hill do Brasil, 1977.

DA SILVA, F.R., Curso de Vibrações Mecânicas, Instituto Militar de Engenharia, Maio 2000.

EDGERTON, R. C. and BEECROFT, G. W. *Dynamic Studies of Two Continuous Plate Girder Bridges*. 1955. Hwy. Res. Bd. Bull., no 124, Washington D.C., pp.33-46, 1955.

EGER, A. *Simulação e análise do desempenho longitudinal veicular sob condições dinâmicas trativas*. 2007. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

FERREIRA, K. I. I. *Avaliação do Critério para Cálculo dos Efeitos das Cargas Móveis em Pontes Rodoviárias*. 1991. PUC-Rio - Tese de Mestrado, RJ, 1991.

GILLESPIE, T.D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, 1992.

HIBBELER, R.C. *Resistência dos materiais*. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.

http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/EngMec_NOTURNO/TM355/Prof_Jorge_Erthal/Slides/ELEM%20MAQ%201%202011-2%20-%20MOLAS%20DE%20TRACAO.pdf

<http://www.ciser.com.br/htcms/media/pdf/destaques/br/folheto-parafusos-estruturas-metalicas.pdf>

<http://www.fem.unicamp.br/~lafer/es690/arquivos/Apostila%20Molas%201.pdf>

http://www.paulisteel.com.br/site/images/online/catálogo_perf%C3%ADs_downloads.pdf

HUANG, T. and VELETOS, A. S. *Analysis of Dynamic Response of Highway Bridges*. 1970. ASCE, J. Mech. Div., Vol. 96, 1970.

INBANATHAN, B. M. J. and WIELAND, M. *Bridge Vibrations due to Vehicle Moving over Rough Surface*. 1987. ASCE, J. Struc. Engr., Vol. 113, no 9, pp.1994-2009, 1987.

INGLIS, C. E. *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*. 1934. Cambridge Univ. Press, London, 1934.

NOWAK, A. S. *Load Model for Bridge Design Code*. 1994. Can. J. Civ. eng., Vol. 21, pp. 36-49, 1994.

RAMALHO, F. N. M. *Pontes Rodoviárias Submetidas a Situações Especiais de Carregamento Dinâmico*. 1988. PUC-Rio - Tese de Mestrado, RJ, 1988.

RAO, S.S – *Vibrações Mecânicas*. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.

RIBEIRO, L. O, *Modelagem de Estruturas com Absorvedores Passivos de Vibrações Através dos Grafos de Ligação*. 2012. Dissertação (Mestrado) em Engenharia Mecânica. Instituto Militar de Engenharia, 2012.

SAAD, A. C. *Aplicação da Teoria do Absorvedor Dinâmico de Vibrações na Redução do Balanço Transversal em Plataformas tipo FPSO*. 2005. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

SCHEFFEY, C. F. *Dynamic Load Analysis and Design of Highway Bridges*. 1955. Hwy. Res. Bd. Bull., no 124, Washington D.C., pp.16-32, 1955.

- SEDLACEK, G. and DROSNER, St. *Dynamik bei Brücken*. 1990. Institut für Stahlbau,
- SILVA, J. G. S. *Análise Dinâmica Não-Determinística de Tabuleiros de Pontes Rodoviárias com Irregularidades Superficiais*. 1996. PUC-Rio - Tese de Doutorado RJ, 1996.
- SILVA, J. G. S. *Comportamento dinâmico de pontes rodoviárias à travessia de veículos sobre a superfície irregular do pavimento*. 2002. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería, Vol.18, no4, pp. 521-540, Espanha, 2002.
- SMITH, J. W. *Finite Strip Analysis of the Dynamic Response of Beam and Slab Highway Bridges*. 1973. Intl. J. Earthquake Engr. Struc. Dyn., Vol. 1, pp.357-370, 1973.
- SOUZA, B. V., LAND F. R. e ALBUQUERQUE M. A. C. *Projeto de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações para Estruturas*. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2011.
- TIMOSHENKO, S. *Vibration Problems in Engineering*. 1964. 3rd Edition, D. Van Nostrand, 1964
- TRAIL-NASH, W. R. and GUPTA, R. K. *Bridge Dynamic Loading due to Road Surface Irregularities and Breaking of Vehicle*. 1980. Intl. J. Earthquake Engr. Struc. Dyn., Vol. 8, pp.83-96, 1980.
- TUNG, T. P., GOODMAN, L. E., CHEN, T. Y. and NEWMARK, N. M. *Highway Bridge Impact Problems*. 1956. Hwy. Res. Bd. Bull, no 124, 1956.
- WEN, R. K. *Dynamic Response of Beams Traversed by Two-Axle Loads*. 1960. ASCE, J. Mech. Div., Vol. 86. 1960.
- WILLIS, R. *Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures*. 1849. Stationary Office, London, 1849.
- WU, J. S., LEE, M. L. and LAI, T. S. *The Dynamic Analysis of a Flat Plate under a Moving Load by the Finite Element Method*. 1987. Intl. J. Num. Meth. Engr., Vol. 24, pp.743-762, 1987.
- ZIBDEH, H. S. and RACKWITZ, R. *Moving Loads on Beams with General Boundary Conditions*. 1996. J. of Sound and Vibration, 195 (1), 85-102, 1996.

APÊNDICE I: Rotina para solução do modelo de um quarto de carro.

```

clear
close all
global a b m1 m2 g Kb
m1=250;
m2=7;
g=9.81;
K1=23000;
Kp=200000;
Z=0.3;
c1=2*Z*sqrt(K1*m1);
m=[m1 0 ; 0 m2];
K=[K1 -K1 ; -K1 K1+Kp];
C=[c1 -c1 ; -c1 c1];
a= [zeros(2) eye(2);-inv(m)*K -inv(m)*C];
b= [zeros(2);inv(m)];
Kb=[0 0;0 Kp];
tspan=[0 7];
y0=[0 0 0 0];
[t,y]=ode45('equacao',tspan,y0);
n=length(t);
x1=y(1:n,1);
x2=y(1:n,2);
v1=y(1:n,3);
v2=y(1:n,4);
Fr=Kp*x2;

figure (1)
plot (t,x1)
title ('grafico 1/4 de carro, deslocamento X tempo')
xlabel ('tempo (s)')
ylabel ('distancia (m)')

figure (2)
plot (t,Fr)
title ('grafico 1/4 de carro, forca na roda X tempo')
xlabel ('tempo (s)')
ylabel ('forca (N)')

function yp=equacao (t,y)
global a b g m1 m2 Kb
ye=0;
yr=[ye;0];
Ft=[-m1*g;-m2*g]+Kb*yr;
yp=a*y+b*Ft;

```

APÊNDICE II: Rotina para solução do modelo de meio carro.

```

clear
close all
global w t1 t2 v yc dqm m1 mp1 mp2 g Kb a b ye1 ye2
m1=500; %massa de meio carro
mp1=7; %massa da roda dianteira
mp2=7;%massa da roda traseira
J=630; %momento de inercia
g=9.81; %aceleração da gravidade
K1=23000; %rigidez da mola dianteira
K2=17000; %rigidez da mola traseira
Kp=200000; %rigidez do pneu
c1=1600; %amortecimento dianteiro
c2=1600; %amortecimento traseiro
v=8.33; %velociade do carro
yc=0.08; %altura do quebra-mola
d=30; %distancia da roda dianteira ao quebra-mola
d1=0.996; %distancia do CG a roda dianteira
d2=1.495; %distancia do CG a roda traseira
dqm=1.5; %comprimento do quebra-mola
t1=(d/v); %tempo da roda dianteira ate o quebra-mola
t2=(d+d1+d2)/v; %tempo da roda traseira ate o quebra-mola
w=((2*pi*v)/dqm); %frequencia
m=[m1 0 0 0; 0 J 0 0; 0 0 mp1 0; 0 0 0 mp2];

K=[ (K1+K2)                ((K1*d1)-(K2*d2))          (-K1)          (-
K2);
    ((K1*d1)-(K2*d2))    ((K1*(d1*d1))+(K2*(d2*d2)))  (-K1)*d1
    (K2)*d2;
    (-K1)                (-K1)*d1                    (K1+Kp)        0;
    (-K2)                (K2)*d2                      0
    (K2+Kp)];

C=[    (c1+c2)                ((c1*d1)-(c2*d2))          -c1          -
c2;
    ((c1*d1)-(c2*d2))    ((c1*(d1*d1))+(c2*(d2*d2)))  (-c1*d1)
    (c2*d2);
    -c1                    (-c1*d1)                    c1
0;
    -c2                    (c2*d2)                      0
c2];

a= [zeros(4) eye(4);-inv(m)*K -inv(m)*C];
b= [zeros(4);inv(m)];
Kb=[0 0;0 0;Kp 0;0 Kp];
tspan=[0 8];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0];
[t,y]=ode45('equacao_meiocarro',tspan,y0);
n=length(t);
x=y(1:n,1);
teta=y(1:n,2);
xp1=y(1:n,3);
xp2=y(1:n,4);

x1=x+(d1*teta);
x2=x-(d2*teta);

for i=1:n;

```

```

if t(i)<t1
    Fr1=Kp*xp1;
elseif t(i)>(t1+(dqm/v));
    Fr1=Kp*xp1;
else
    Fr1=Kp*(xp1-ye1);
end
if t(i)<t2
    Fr2=Kp*xp2;
elseif t(i)>(t2+(dqm/v));
    Fr2=Kp*xp2;
else
    Fr2=Kp*(xp2-ye2);
end
end

Fm1=K1*(x1-xp1);
Fm2=K2*(x2-xp2);

figure (1)
plot (t, x, t, teta)
title ('grafico 1/2 de carro')
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')
legend ('Centro de massa','angulo de arfagem')

figure (2)
plot (t, Fr1, t, Fr2)
title ('grafico 1/2 de carro')
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Força (N)')
legend ('pneu dianteiro','pneu traseiro')

figure (3)
plot (t, xp1, t, xp2)
title ('grafico 1/2 de carro')
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')
legend ('pneu dianteiro','pneu traseiro')

figure (4)
plot (t, Fm1, t, Fm2)
title ('grafico 1/2 de carro')
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Força (N)')
legend ('dianteira','traseira')

figure (5)
plot (t, x1, t, x2)
title ('grafico 1/2 de carro')
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')
legend ('suporte dianteiro','suporte traseiro')

```

```
function yp=equacao_meiocarro (t,y)
global w t1 t2 v yc dqm m1 mp1 mp2 g Kb a b ye1 ye2

if t<t1;
    ye1=0;
elseif t>(t1+(dqm/v));
    ye1=0;
else
    ye1=(yc/2)*(1-cos(w*(t-t1)));
end

if t<t2;
    ye2=0;
elseif t>(t2+(dqm/v));
    ye2=0;
else
    ye2=(yc/2)*(1-cos(w*(t-t2)));
end

yr=[ye1;ye2];
Ft=[-m1*g;0;-mp1*g;-mp2*g]+Kb*yr;
yp=a*y+b*Ft;
```

APÊNDICE III: Rotina para solução do modelo da ponte.

```

clear
close all
global F L v a b D
L=10;
Lp=60;
E=200e9;
I=8e-5;
ro=7850;
A=0.48;
F=-1000;
v=4.16;
D=5;
tpi=D/v;
tpf=(D+6*L)/v;

uest = F/(48*E*I/Lp^3);

K=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
-6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0
0 0 0;
2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0
0 0 0;
0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0
0 0 0;
0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0
0 0 0;
0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L
0 0 0;
0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L
0 0 0;
0 0 0 0 0 -12 -6*L 24 0
-12 6*L 0;
0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L
-6*L 2*L*L 0;
0 0 0 0 0 0 0 -12 -6*L
24 0 6*L;
0 0 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L
0 8*L*L 2*L*L;
0 0 0 0 0 0 0 0 0
6*L 2*L*L 4*L*L];

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
13*L 312 0 54 -13*L 0 0 0
0 0 0 0;
-3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0
0 0 0 0;
0 54 13*L 312 0 54 -13*L 0
0 0 0 0;
0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0
0 0 0 0;
0 0 0 54 13*L 312 0 54 -
13*L 0 0 0;
0 0 0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -
3*L*L 0 0 0;

```

```

0      54      -13*L  0;
0      54      -13*L  0;
8*L*L  13*L    -3*L*L 0;
13*L   312    0      -13*L;
-3*L*L 0      8*L*L  -3*L*L;
0      -13*L  -3*L*L  4*L*L];

```

```

B=0.05*K+0.05*M;
a=[zeros(12) eye(12);-inv(M)*K -inv(M)*B];
b=[zeros(12);inv(M)];
tspan=[0 8*tpf];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[t,y]=ode23s('equacao_pont',tspan,y0);
n=length(t);
x2=y(1:n,1);
x3=y(1:n,2);
x4=y(1:n,3);
x5=y(1:n,4);
x6=y(1:n,5);
x7=y(1:n,6);
x8=y(1:n,7);
x9=y(1:n,8);
x10=y(1:n,9);
x11=y(1:n,10);
x12=y(1:n,11);
x14=y(1:n,12);

```

```

figure(1)
plot(t,x8)
title('deslocamento ponte')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')

```

```

figure(2)
plot(t,x8,t,uest)
title('deslocamento ponte')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend('ponte dinamico','ponte estatico')

```

```

function yp=equacao_pont(t,y)
global F L v a b D
F3=0;
F7=0;
F9=0;
F5=0;
F11=0;
F2=0;
F4=0;
F6=0;

```

```

F8=0;
F10=0;
F12=0;
F14=0;

t1=D/v;
t2=(D+L)/v;
t3=(D+L*2)/v;
t4=(D+L*3)/v;
t5=(D+4*L)/v;
t6=(D+5*L)/v;
t7=(D+6*L)/v;

if (t<t2);
    dd=(t-t1)*v;
    F2=(dd/L)*F;
else
end
if (t2<t)&&(t<t3);
    dd=(t-t2)*v;
    F2=((L-dd)/L)*F;
    F4=(dd/L)*F;
else
end
if (t3<t)&&(t<t4);
    dd=(t-t3)*v;
    F4=((L-dd)/L)*F;
    F6=(dd/L)*F;
else
end
if (t4<t)&&(t<t5);
    dd=(t-t4)*v;
    F6=((L-dd)/L)*F;
    F8=(dd/L)*F;
else
end
if (t5<t)&&(t<t6);
    dd=(t-t5)*v;
    F8=((L-dd)/L)*F;
    F10=(dd/L)*F;
else
end
if (t6<t)&&(t<t7);
    dd=(t-t6)*v;
    F10=((L-dd)/L)*F;
else
end

Ft=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14];
yp=a*y+b*Ft;

```

APÊNDICE IV: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{4}$ de carro.

```

clear
close all
global L v a D m1 m2 g m M Kp
L=10; %vão da ponte
m1=250; %massa do veiculo
m2=7; %massa da roda
g=9.81; %aceleração da gravidade
K1=23000; %rigidez da mola do veiculo
Kp=200000; %rigidez do pneu
c1=1600; %coeficiente de amortecimento do veiculo

v=4.16; %velocidade do carro 15Km/h
D=20; %distancia inicial do veiculo a ponte
tpi=D/v; %tempo incial do veiculo na ponte
tpf=(D+6*L)/v; %tempo final do veiculo na ponte

E=200e9;
I=8e-5;
ro=7850;
A=0.48;

K=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L  -6*L  2*L*L  0  0  0  0  0  0
0  0  0;
-6*L  24  0  -12  6*L  0  0  0  0
0  0  0;
2*L*L  0  8*L*L  -6*L  2*L*L  0  0  0  0
0  0  0;
0  -12  -6*L  24  0  -12  6*L  0  0
0  0  0;
0  6*L  2*L*L  0  8*L*L  -6*L  2*L*L  0  0
0  0  0;
0  0  0  -12  -6*L  24  0  -12  6*L
0  0  0;
0  0  0  6*L  2*L*L  0  8*L*L  -6*L  2*L*L
0  0  0;
0  0  0  0  0  -12  -6*L  24  0
-12  6*L  0;
0  0  0  0  0  6*L  2*L*L  0  8*L*L
-6*L  2*L*L  0;
0  0  0  0  0  0  0  0  -12  -6*L
24  0  6*L;
0  0  0  0  0  0  0  0  6*L  2*L*L
0  8*L*L  2*L*L;
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
6*L  2*L*L  4*L*L];

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L  13*L  -3*L*L  0  0  0  0  0
0  0  0  0;
13*L  312  0  54  -13*L  0  0  0
0  0  0;
-3*L*L  0  8*L*L  13*L  -3*L*L  0  0  0
0  0  0;
0  54  13*L  312  0  54  -13*L  0
0  0  0  0;

```



```

figure(1)
plot(t,x1,t,x2)
title('deslocamento do carro')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend ('carro','roda')

```

```

figure(2)
plot(t,u7)
title('deslocamento do nó central da ponte')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')

```

```

function yp=equacao_puq(t,y)
global L v a D m1 m2 g m M Kp

F2=0;
F3=0;
F4=0;
F5=0;
F6=0;
F7=0;
F8=0;
F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;
N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;

u=0;
Ftr=0;

t1=D/v;
t2=(D+L)/v;
t3=(D+L*2)/v;
t4=(D+L*3)/v;
t5=(D+L*4)/v;
t6=(D+L*5)/v;
t7=(D+L*6)/v;

if (t1<t)&&(t<t2);
    dd=(t-t1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*y(5)+N3*y(6)+N4*y(7);
    Ftr=Kp*(y(2)-u);
    F3=(dd/L)*Ftr;
else
end

```

```

if (t2<t)&&(t<t3);
    dd=(t-t2)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(6)+N2*y(7)+N3*y(8)+N4*y(9);
    Ftr=Kp*(y(2)-u);
    F3=(L-dd)/L)*Ftr;
    F5=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t3<t)&&(t<t4);
    dd=(t-t3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(8)+N2*y(9)+N3*y(10)+N4*y(11);
    Ftr=Kp*(y(2)-u);
    F5=(L-dd)/L)*Ftr;
    F7=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t4<t)&&(t<t5);
    dd=(t-t4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(10)+N2*y(11)+N3*y(12)+N4*y(13);
    Ftr=Kp*(y(2)-u);
    F7=(L-dd)/L)*Ftr;
    F9=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t5<t)&&(t<t6);
    dd=(t-t5)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(12)+N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
    Ftr=Kp*(y(2)-u);
    F9=((L-dd)/L)*Ftr;
    F11=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t6<t)&&(t<t7);
    dd=(t-t6)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(14)+N2*y(15)+N4*y(16);
    Ftr=Kp*(y(2)-u);
    F11=((L-dd)/L)*Ftr;
else
end
F=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14];

```

```
Fc=inv(m)*[-m1*g;-m2*g+Kp*u];  
bc=[0;0;Fc];  
Fp=inv(M)*F;  
bp=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;Fp];  
Ft=[bc;bp];  
  
yp=a*y+Ft;
```

APÊNDICE V: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{2}$ de carro.

```

clear
close all
global L v a D m1 mp1 mp2 g m M Kp d1 d2
L=10; %comprimento do vão da ponte
m1=500; %massa de meio carro
mp1=7; %massa da roda dianteira
mp2=7;%massa da roda traseira
J=630; %momento de inercia
g=9.81; %aceleração da gravidade
K1=23000; %rigidez da mola dianteira
K2=17000; %rigidez da mola traseira
Kp=200000; %rigidez do pneu
c1=1600; %amortecimento dianteiro
c2=1600; %amortecimento traseiro
d1=0.996; %distancia do CG a roda dianteira
d2=1.495; %distancia do CG a roda traseira

v=4.16; %velocidade do carro
D=15; %distancia da roda dianteira a ponte
t1=(D/v); %tempo da roda dianteira ate a ponte
t2=(D+d1+d2)/v; %tempo da roda traseira ate a ponte
tpf1=(D+6*L)/v; %tempo de saída da roda dianteira da ponte
tpf2=((D+d1+d2)+(6*L))/v; %tempo de saída da roda traseira da ponte

E=200e9;
I=8e-5;
ro=7850;
A=0.48;

K=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
-6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0
0 0 0;
2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0
0 0 0;
0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0
0 0 0;
0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0
0 0 0;
0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L
0 0 0;
0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L
0 0 0;
0 0 0 0 0 -12 -6*L 24 0
-12 6*L 0;
0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L
-6*L 2*L*L 0;
0 0 0 0 0 0 0 -12 -6*L
24 0 6*L;
0 0 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L
0 8*L*L 2*L*L;
0 0 0 0 0 0 0 0 0
6*L 2*L*L 4*L*L];

```

```

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
13*L 312 0 54 -13*L 0 0 0
0 0 0 0;
-3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0
0 0 0 0;
0 54 13*L 312 0 54 -13*L 0
0 0 0 0;
0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0
0 0 0 0;
0 0 0 54 13*L 312 0 54 -
13*L 0 0 0;
0 0 0 -13*L 312 0 8*L*L 13*L -
3*L*L 0 0 0;
0 0 0 0 54 13*L 312
0 54 -13*L 0;
0 0 0 -13*L -3*L*L 0
8*L*L 13*L -3*L*L 0;
0 0 0 0 0 0 54
13*L 312 0 -13*L;
0 0 0 0 0 0 -13*L
-3*L*L 0 8*L*L -3*L*L;
0 0 0 0 0 0 0
0 -13*L -3*L*L 4*L*L];

C=0.05*K+0.05*M;

m=[m1 0 0 0; 0 J 0 0; 0 0 mp1 0; 0 0 0 mp2];

k=[(K1+K2) ((K1*d1)-(K2*d2)) (-K1) (-
K2);
((K1*d1)-(K2*d2)) ((K1*(d1*d1))+(K2*(d2*d2))) (-K1)*d1
(K2)*d2;
(-K1) (-K1)*d1 (K1+Kp) 0;
(-K2) (K2)*d2 0
(K2+Kp)];

c=[(c1+c2) ((c1*d1)-(c2*d2)) -c1 -
c2;
((c1*d1)-(c2*d2)) ((c1*(d1*d1))+(c2*(d2*d2))) (-c1*d1)
(c2*d2);
-c1 (-c1*d1) c1
0;
-c2 (c2*d2) 0
c2];

ap=[zeros(12) eye(12);-inv(M)*K -inv(M)*C];
av=[zeros(4) eye(4);-inv(m)*k -inv(m)*c];
a=[av zeros(8,24);zeros(24,8) ap];
tspan=[0 8*tpf2];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[t,y]=ode23s('equacao_pmc',tspan,y0);
n=length(t);

x1=y(1:n,1);
teta=y(1:n,2);
xp1=y(1:n,3);
xp2=y(1:n,4);
v1=y(1:n,5);
w=y(1:n,6);

```

```

vp1=y(1:n,7);
vp2=y(1:n,8);
u2=y(1:n,9);
u3=y(1:n,10);
u4=y(1:n,11);
u5=y(1:n,12);
u6=y(1:n,13);
u7=y(1:n,14);
u8=y(1:n,15);
u9=y(1:n,16);
u10=y(1:n,17);
u11=y(1:n,18);
u12=y(1:n,19);
u14=y(1:n,20);
up2=y(1:n,21);
up3=y(1:n,22);
up4=y(1:n,23);
up5=y(1:n,24);
up6=y(1:n,25);
up7=y(1:n,26);
up8=y(1:n,27);
up9=y(1:n,28);
up10=y(1:n,29);
up11=y(1:n,30);
up12=y(1:n,31);
up14=y(1:n,32);

figure(1)
plot(t,u7)
title('deslocamento nó central da ponte')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')

figure(2)
plot(t,x1,t,teta)
title('deslocamento carro')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend('deslocamento vert.','arfagem')

figure(3)
plot(t,xp1, t, xp2)
title('deslocamento rodas do carro')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend('roda dianteira','roda traseira')

function yp=equacao_pmc(t,y)
global L v a D m1 mp1 mp2 g m M Kp d1 d2

t
F2=0;
F3=0;
F4=0;
F5=0;

```

```

F6=0;
F7=0;
F8=0;
F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;
N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;

u=0;
Ftr=0;

t1=D/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 1
t2=(D+L)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 2
t3=(D+L*2)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 3
t4=(D+L*3)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 4
t5=(D+L*4)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 5
t6=(D+L*5)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 6
t7=(D+L*6)/v; %tempo para a roda dianteira sair da ponte

if (t1<t) && (t<t2);
    dd=(t-t1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*y(9)+N3*y(10)+N4*y(11);
    Ftr=Kp*(y(3)-u);
    F2=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t2<t) && (t<t3);
    dd=(t-t2)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(10)+N2*y(11)+N3*y(12)+N4*y(13);
    Ftr=Kp*(y(3)-u);
    F2=((L-dd)/L)*Ftr;
    F4=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t3<t) && (t<t4);
    dd=(t-t3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(12)+N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
    Ftr=Kp*(y(3)-u);
    F4=((L-dd)/L)*Ftr;
    F6=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t4<t) && (t<t5);
    dd=(t-t4)*v;

```



```

N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(14)+N2*y(15)+N3*y(16)+N4*y(17);
Ftr=Kp*(y(3)-u);
F6=((L-dd)/L)*Ftr;
F8=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t5<t)&&(t<t6);
dd=(t-t5)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(16)+N2*y(17)+N3*y(18)+N4*y(19);
Ftr=Kp*(y(3)-u);
F8=((L-dd)/L)*Ftr;
F10=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t6<t)&&(t<t7);
dd=(t-t6)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(18)+N2*y(19)+N4*y(20);
Ftr=Kp*(y(3)-u);
F10=((L-dd)/L)*Ftr;
else
end

tt1=(D+d1+d2)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 1
tt2=((D+d1+d2)+L)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 2
tt3=((D+d1+d2)+L*2)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 3
tt4=((D+d1+d2)+L*3)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 4
tt5=((D+d1+d2)+L*4)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 5
tt6=((D+d1+d2)+L*5)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 6
tt7=((D+d1+d2)+L*6)/v; %tempo para a roda traseira sair da ponte

if (tt1<t)&&(t<tt2);
dd=(t-tt1)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N2*y(9)+N3*y(10)+N4*y(11);
Ftr=Kp*(y(4)-u);
F2=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt2<t)&&(t<tt3);
dd=(t-tt2)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(10)+N2*y(11)+N3*y(12)+N4*y(13);
Ftr=Kp*(y(4)-u);

```

```

    F2=( (L-dd)/L)*Ftr;
    F4=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt3<t)&&(t<tt4);
    dd=(t-tt3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(12)+N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
    Ftr=Kp*(y(4)-u);
    F4=( (L-dd)/L)*Ftr;
    F6=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt4<t)&&(t<tt5);
    dd=(t-tt4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(14)+N2*y(15)+N3*y(16)+N4*y(17);
    Ftr=Kp*(y(4)-u);
    F6=( (L-dd)/L)*Ftr;
    F8=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt5<t)&&(t<tt6);
    dd=(t-tt5)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(16)+N2*y(17)+N3*y(18)+N4*y(19);
    Ftr=Kp*(y(4)-u);
    F8=( (L-dd)/L)*Ftr;
    F10=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt6<t)&&(t<tt7);
    dd=(t-tt6)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(18)+N2*y(19)+N4*y(20);
    Ftr=Kp*(y(4)-u);
    F10=( (L-dd)/L)*Ftr;
else
end

F=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14];
Fc=inv(m)*[-m1*g;0;-mp1*g+Kp*u;-mp2*g+Kp*u];
bc=[0;0;0;0;Fc];
Fp=inv(M)*F;
bp=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;Fp];
Ft=[bc;bp];

yp=a*y+Ft;

```

APÊNDICE VI: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{4}$ de carro e implementação de um absorvedor dinâmico.

```

close all
global L v a aa D m1 m2 g m M Kp
L=10; % comprimento do elemento de viga
Lp = 6 * L; % vão da ponte
m1=250; % massa do veiculo
m2=7; % massa da roda
g=9.81; % aceleração da gravidade
K1=23000; % rigidez da mola do veiculo
Kp=200000; % rigidez do pneu
c1=1600; % coeficiente de amortecimento do veiculo

E=200e9;
I=8e-3;
ro=7850;
A=0.48;

uest = -(m1+m2)*g/(48*E*I/Lp^3);

Ma=3000; % Massa do absorvedor
Ka=11000; % Rigidez do absorvedor

v = 16.67; %velocidade 40Km/h

D=80; % distancia inicial do veiculo a ponte
tpi=D/v; % tempo incial do veiculo na ponte
tpf=(D+6*L)/v; % tempo final do veiculo na ponte
tfs = 5*tpf;

K=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0
0 0 0; -6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0
0 0 0; 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0
0 0 0; 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0
0 0 0; 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0
0 0 0; 0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L
0 0 0; 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L
-12 6*L 0; 0 0 0 0 0 -12 -6*L 24 0
-6*L 2*L*L 0; 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L
24 0 6*L; 0 0 0 0 0 0 0 -12 -6*L
0 8*L*L 2*L*L; 0 0 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L
6*L 2*L*L 4*L*L];

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0
0 0 0 0;

```

```

0      0      0      13*L   312      0      54  -13*L   0      0      0
0      0      0      0;
0      0      0      -3*L*L   0      8*L*L   13*L  -3*L*L   0      0      0
0      0      0      0;
0      0      0      0      54      13*L   312      0      54  -13*L   0
0      0      0      0;
0      0      0      0  -13*L  -3*L*L   0      8*L*L   13*L  -3*L*L   0
0      0      0      0;
13*L   0      0      0      0;
13*L   0      0      0      0      0  -13*L  -3*L*L   0      8*L*L   13*L  -
3*L*L   0      0      0;
0      54      -13*L  0;
0      0      0      0      0      0      0      54      13*L   312
8*L*L   13*L  -3*L*L  0;
0      0      0      0      0      0      0  -13*L  -3*L*L   0
13*L   312      0      -13*L;
0      0      0      0      0      0      0      0      0      54
-3*L*L   0      8*L*L  -3*L*L;
0      0      0      0      0      0      0      0      0      -13*L
0      -13*L  -3*L*L  4*L*L];

```

```
C=0.1*K+0.1*M;
```

```
m=[m1 0 ; 0 m2];
```

```
k=[K1 -K1 ; -K1 K1+Kp];
```

```
c=[c1 -c1 ; -c1 c1];
```

```
ap=[zeros(12) eye(12);-inv(M)*K -inv(M)*C];
```

```
av=[zeros(2) eye(2);-inv(m)*k -inv(m)*c];
```

```
a=[av zeros(4,24);zeros(24,4) ap];
```

```
tspan=[0 tfs];
```

```
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

```
[t,y]=ode23s('equacao_puq',tspan,y0);
```

```
n=length(t);
```

```
x1=y(1:n,1);
```

```
x2=y(1:n,2);
```

```
v1=y(1:n,3);
```

```
v2=y(1:n,4);
```

```
u2=y(1:n,5);
```

```
u3=y(1:n,6);
```

```
u4=y(1:n,7);
```

```
u5=y(1:n,8);
```

```
u6=y(1:n,9);
```

```
u7=y(1:n,10);
```

```
u8=y(1:n,11);
```

```
u9=y(1:n,12);
```

```
u10=y(1:n,13);
```

```
u11=y(1:n,14);
```

```
u12=y(1:n,15);
```

```
u14=y(1:n,16);
```

```
up2=y(1:n,17);
```

```
up3=y(1:n,18);
```

```
up4=y(1:n,19);
```

```
up5=y(1:n,20);
```

```
up6=y(1:n,21);
```

```
up7=y(1:n,22);
```

```
up8=y(1:n,23);
```

```

up9=y(1:n,24);
up10=y(1:n,25);
up11=y(1:n,26);
up12=y(1:n,27);
up14=y(1:n,28);

figure(1)
plot(t,x1, t, x2,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
title('deslocamentos do carro e da roda')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend ('carro','roda')

figure(2)
plot(t,u7, t,x1+1, t, x2+0.25, t,uest,'b--',tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
title('deslocamento da ponte, do carro e da roda')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend ('ponte','carro','roda','desl estatico')

% Introdução do absorvedor

K(6,6)=K(6,6)+Ka;
K(13,13)=Ka;
K(13,6)=-Ka;
K(6,13)=-Ka;

M(13,13)=Ma;

C=0.1*K+0.1*M;

ap=[zeros(13) eye(13);-inv(M)*K -inv(M)*C];
av=[zeros(2) eye(2);-inv(m)*k -inv(m)*c];
aa=[av zeros(4,26);zeros(26,4) ap];
tspan=[0 tfs];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[tt,yy]=ode23s('equacao_p',tspan,y0);
nn=length(tt);
xx1=yy(1:nn,1);
xx2=yy(1:nn,2);
vv1=yy(1:nn,3);
vv2=yy(1:nn,4);
ux2=yy(1:nn,5);
ux3=yy(1:nn,6);
ux4=yy(1:nn,7);
ux5=yy(1:nn,8);
ux6=yy(1:nn,9);
ux7=yy(1:nn,10);
ux8=yy(1:nn,11);
ux9=yy(1:nn,12);
ux10=yy(1:nn,13);
ux11=yy(1:nn,14);
ux12=yy(1:nn,15);
ux14=yy(1:nn,16);
ua=yy(1:nn,17);

figure(3)
plot(t,u7, tt,ux7, tt,ua,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
title('deslocamento da ponte com e sem o absorvedor passivo')
xlabel('tempo')

```

```
ylabel('deslocamento')
legend('sem absorvedor','com absorvedor','absorvedor')
```

```
figure(4)
plot(tt,ux7,tt,ua,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamentos')
legend('ponte','absorvedor','desl estatico')
```

```
function yp=equacao_p(tt,yy)
global L v aa D m1 m2 g m M Kp
```

```
tt
F2=0;
F3=0;
F4=0;
F5=0;
F6=0;
F7=0;
F8=0;
F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;
Fa = 0;
N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;
```

```
u=0;
Ftr=0;
```

```
t1=D/v;
t2=(D+L)/v;
t3=(D+L*2)/v;
t4=(D+L*3)/v;
t5=(D+L*4)/v;
t6=(D+L*5)/v;
t7=(D+L*6)/v;
```

```
if tt < t1
else
```

```
if tt<t2;
    dd=(tt-t1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*yy(5)+N3*yy(6)+N4*yy(7);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F3=(dd/L)*Ftr;
```

```

else

if tt<t3;
    dd=(tt-t2)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(6)+N2*yy(7)+N3*yy(8)+N4*yy(9);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F3=(L-dd)/L)*Ftr;
    F5=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t4;
    dd=(tt-t3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(8)+N2*yy(9)+N3*yy(10)+N4*yy(11);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F5=(L-dd)/L)*Ftr;
    F7=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t5;
    dd=(tt-t4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(10)+N2*yy(11)+N3*yy(12)+N4*yy(13);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F7=(L-dd)/L)*Ftr;
    F9=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t6;
    dd=(tt-t5)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(12)+N2*yy(13)+N3*yy(14)+N4*yy(15);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F9=(L-dd)/L)*Ftr;
    F11=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t7;
    dd=(tt-t6)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(14)+N2*yy(15)+N4*yy(16);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F11=(L-dd)/L)*Ftr;
else

```

```
end  
end  
end  
end  
end  
end  
end
```

```
F=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14;Fa];  
Fc=inv(m)*[-m1*g;-m2*g+Kp*u];  
bc=[0;0;Fc];  
Fp=inv(M)*F;  
bp=[zeros(13,1);Fp];  
Ft=[bc;bp];
```

```
yp=aa*yy+Ft;
```


APÊNDICE VII: Rotina para solução do modelo da ponte com $\frac{1}{2}$ de carro e implementação de um absorvedor dinâmico.

```

clear
close all
global L v a D m1 mp1 mp2 g m M Kp d1 d2 aa Ma
L=10; %comprimento do vão da ponte
Lp=6*L; % comprimento total da ponte
m1=500; %massa de meio carro
mp1=7; %massa da roda dianteira
mp2=7;%massa da roda traseira
J=630; %momento de inercia
g=9.81; %aceleração da gravidade
K1=23000; %rigidez da mola dianteira
K2=17000; %rigidez da mola traseira
Kp=200000; %rigidez do pneu
c1=1600; %amortecimento dianteiro
c2=1600; %amortecimento traseiro
d1=0.996; %distancia do CG a roda dianteira
d2=1.495; %distancia do CG a roda traseira

E=200e9;
I=8e-3;
ro=7850;
A=0.48;

uest = -(m1+mp1+mp2+3000)*g/(48*E*I/Lp^3);

Ma=3000; %Massa do peso do absorvedor
Ka=11000; %Rigidez da mola do absorvedor;

v=11.11; %velocidade do carro 40Km/h

D=60; %distancia da roda dianteira a ponte
tpi1=(D/v); %tempo da roda dianteira ate a ponte
tpi2=(D+d1+d2)/v; %tempo da roda traseira ate a ponte
tpf1=(D+6*L)/v; %tempo de saída da roda dianteira da ponte
tpf2=((D+d1+d2)+(6*L))/v; %tempo de saída da roda traseira da ponte

K=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
-6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0
0 0 0;
2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0
0 0 0;
0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0
0 0 0;
0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0
0 0 0;
0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L
0 0 0;
0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L
0 0 0;
0 0 0 0 0 -12 -6*L 24 0
-12 6*L 0;
0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L
-6*L 2*L*L 0;

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 -12 -6*L
24 0 6*L;
0 0 0 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L
0 8*L*L 2*L*L;
6*L 2*L*L 4*L*L];

```

```

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
13*L 312 0 54 -13*L 0 0 0
0 0 0 0;
-3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0
0 0 0 0;
0 54 13*L 312 0 54 -13*L 0
0 0 0 0;
0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0
0 0 0 0;
0 0 0 54 13*L 312 0 54 -
13*L 0 0 0;
0 0 0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -
3*L*L 0 0 0;
0 0 0 0 54 13*L 312
0 54 -13*L 0;
8*L*L 13*L -3*L*L 0;
0 0 0 -13*L -3*L*L 0
13*L 312 0 -13*L;
-3*L*L 0 8*L*L -3*L*L;
0 -13*L -3*L*L 4*L*L];

```

```
C=0.1*K+0.1*M;
```

```
m=[m1 0 0 0; 0 J 0 0; 0 0 mp1 0; 0 0 0 mp2];
```

```

k=[(K1+K2) ((K1*d1)-(K2*d2)) (-K1) (-
K2);
((K1*d1)-(K2*d2)) ((K1*(d1*d1))+(K2*(d2*d2))) (-K1)*d1
(K2)*d2;
(-K1) (-K1)*d1 (K1+Kp) 0;
(-K2) (K2)*d2 0
(K2+Kp)];

```

```

c=[(c1+c2) ((c1*d1)-(c2*d2)) -c1 -
c2;
((c1*d1)-(c2*d2)) ((c1*(d1*d1))+(c2*(d2*d2))) (-c1*d1)
(c2)*d2;
-c1 (-c1*d1) c1
0;
-c2 (c2*d2) 0
c2];

```

```
ap=[zeros(12) eye(12);-inv(M)*K -inv(M)*C];
```

```
av=[zeros(4) eye(4);-inv(m)*k -inv(m)*c];
```

```
a=[av zeros(8,24);zeros(24,8) ap];
```

```
tspan=[0 5*tpf2];
```

```
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

```

[t,y]=ode23s('equacao_pmc',tspan,y0);
n=length(t);

x1=y(1:n,1);
teta=y(1:n,2);
xp1=y(1:n,3);
xp2=y(1:n,4);
v1=y(1:n,5);
w=y(1:n,6);
vp1=y(1:n,7);
vp2=y(1:n,8);
u2=y(1:n,9);
u3=y(1:n,10);
u4=y(1:n,11);
u5=y(1:n,12);
u6=y(1:n,13);
u7=y(1:n,14);
u8=y(1:n,15);
u9=y(1:n,16);
u10=y(1:n,17);
u11=y(1:n,18);
u12=y(1:n,19);
u14=y(1:n,20);
up2=y(1:n,21);
up3=y(1:n,22);
up4=y(1:n,23);
up5=y(1:n,24);
up6=y(1:n,25);
up7=y(1:n,26);
up8=y(1:n,27);
up9=y(1:n,28);
up10=y(1:n,29);
up11=y(1:n,30);
up12=y(1:n,31);
up14=y(1:n,32);

figure(1)
plot(t,u7,tpi1,0,'r*',tpf2,0,'r*')
title('deslocamento nó central da ponte')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')

figure(2)
plot(t,x1,t,xp1,t,xp2,tpi1,0,'r*',tpf2,0,'r*')
title('deslocamento carro')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend('carro','roda dianteira','roda traseira')

% Inicio do absorvedor

K(8,8)=K(8,8)+Ka;
K(13,13)=Ka;
K(13,8)=-Ka;
K(8,13)=-Ka;

M(13,13)=Ma;

C=0.1*K+0.1*M;

```



```

F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;

N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;

u=0;
Ftr=0;

t1=D/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 1
t2=(D+L)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 2
t3=(D+L*2)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 3
t4=(D+L*3)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 4
t5=(D+L*4)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 5
t6=(D+L*5)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 6
t7=(D+L*6)/v; %tempo para a roda dianteira sair da ponte

if (t1<tt)&&(tt<t2);
    dd=(tt-t1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*yy(9)+N3*yy(10)+N4*yy(11);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F2=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t2<tt)&&(tt<t3);
    dd=(tt-t2)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(10)+N2*yy(11)+N3*yy(12)+N4*yy(13);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F2=(L-dd)/L)*Ftr;
    F4=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t3<tt)&&(tt<t4);
    dd=(tt-t3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(12)+N2*yy(13)+N3*yy(14)+N4*yy(15);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F4=(L-dd)/L)*Ftr;
    F6=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t4<tt)&&(tt<t5);
    dd=(tt-t4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);

```

```

N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(14)+N2*yy(15)+N3*yy(16)+N4*yy(17);
Ftr=Kp*(yy(3)-u);
F6=(L-dd)/L)*Ftr;
F8=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t5<tt)&&(tt<t6);
dd=(tt-t5)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(16)+N2*yy(17)+N3*yy(18)+N4*yy(19);
Ftr=Kp*(yy(3)-u);
F8=((L-dd)/L)*Ftr;
F10=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t6<tt)&&(tt<t7);
dd=(tt-t6)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(18)+N2*yy(19)+N4*yy(20);
Ftr=Kp*(yy(3)-u);
F10=((L-dd)/L)*Ftr;
else
end

tt1=(D+d1+d2)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 1
tt2=((D+d1+d2)+L)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 2
tt3=((D+d1+d2)+L*2)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 3
tt4=((D+d1+d2)+L*3)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 4
tt5=((D+d1+d2)+L*4)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 5
tt6=((D+d1+d2)+L*5)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 6
tt7=((D+d1+d2)+L*6)/v; %tempo para a roda traseira sair da ponte

if (tt1<tt)&&(tt<tt2);
dd=(tt-tt1)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N2*yy(9)+N3*yy(10)+N4*yy(11);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F2=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt2<tt)&&(tt<tt3);
dd=(tt-tt2)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(10)+N2*yy(11)+N3*yy(12)+N4*yy(13);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F2=(L-dd)/L)*Ftr;

```

```

    F4=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt3<tt)&&(tt<tt4);
    dd=(tt-tt3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(12)+N2*yy(13)+N3*yy(14)+N4*yy(15);
    Ftr=Kp*(yy(4)-u);
    F4=(L-dd)/L)*Ftr;
    F6=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt4<tt)&&(tt<tt5);
    dd=(tt-tt4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(14)+N2*yy(15)+N3*yy(16)+N4*yy(17);
    Ftr=Kp*(yy(4)-u);
    F6=(L-dd)/L)*Ftr;
    F8=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt5<tt)&&(tt<tt6);
    dd=(tt-tt5)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(16)+N2*yy(17)+N3*yy(18)+N4*yy(19);
    Ftr=Kp*(yy(4)-u);
    F8=((L-dd)/L)*Ftr;
    F10=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt6<tt)&&(tt<tt7);
    dd=(tt-tt6)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(18)+N2*yy(19)+N4*yy(20);
    Ftr=Kp*(yy(4)-u);
    F10=((L-dd)/L)*Ftr;
else
end

F=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14;0];
Fc=inv(m)*[-m1*g;0;-mp1*g+Kp*u;-mp2*g+Kp*u];
bc=[0;0;0;0;Fc];
Fp=inv(M)*F;
bp=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;Fp];
Ft=[bc;bp];

yp=aa*yy+Ft;

```



```

0      8*L*L  2*L*L;
0      0      0      0      0      0      0      0      6*L  2*L*L
6*L    2*L*L  4*L*L];

```

```

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L  13*L -3*L*L  0      0      0      0      0
0      0      0      0;
                13*L  312      0      54 -13*L  0      0      0
0      0      0      0;
                -3*L*L  0  8*L*L  13*L -3*L*L  0      0      0
0      0      0      0;
                0      54  13*L  312      0      54 -13*L  0
0      0      0      0;
                0 -13*L -3*L*L  0  8*L*L  13*L -3*L*L  0
0      0      0      0;
                0      0      0      54  13*L  312      0      54 -
13*L      0      0      0;
                0      0      0 -13*L -3*L*L  0  8*L*L  13*L -
3*L*L      0      0      0;
                0      0      0      0      0      54  13*L  312
0      54      -13*L  0;
                0      0      0      0      0      0 -13*L -3*L*L  0
8*L*L      13*L  -3*L*L  0;
                0      0      0      0      0      0      0      54
13*L      312      0      -13*L;
                0      0      0      0      0      0      0      -13*L
-3*L*L      0      8*L*L -3*L*L;
                0      0      0      0      0      0      0      0
0      -13*L -3*L*L  4*L*L];

```

```
C=0.1*K+0.1*M;
```

```

m=[m1 0 ; 0 m2];
k=[K1 -K1 ; -K1 K1+Kp];
c=[c1 -c1 ; -c1 c1];

```

```

ap=[zeros(12) eye(12);-inv(M)*K -inv(M)*C];
av=[zeros(2) eye(2);-inv(m)*k -inv(m)*c];
a=[av zeros(4,24);zeros(24,4) ap];
tspan=[0 tfs];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[t,y]=ode23s('equacao_puq',tspan,y0);
n=length(t);

```

```

x1=y(1:n,1);
x2=y(1:n,2);
v1=y(1:n,3);
v2=y(1:n,4);
u2=y(1:n,5);
u3=y(1:n,6);
u4=y(1:n,7);
u5=y(1:n,8);
u6=y(1:n,9);
u7=y(1:n,10);
u8=y(1:n,11);
u9=y(1:n,12);
u10=y(1:n,13);
u11=y(1:n,14);
u12=y(1:n,15);
u14=y(1:n,16);

```

```

up2=y(1:n,17);
up3=y(1:n,18);
up4=y(1:n,19);
up5=y(1:n,20);
up6=y(1:n,21);
up7=y(1:n,22);
up8=y(1:n,23);
up9=y(1:n,24);
up10=y(1:n,25);
up11=y(1:n,26);
up12=y(1:n,27);
up14=y(1:n,28);

figure(1)
plot(t,x1, t, x2,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
title('deslocamentos do carro e da roda')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend ('carro','roda')

figure(2)
plot(t,u7,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
title('deslocamento da ponte, do carro e da roda')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend ('ponte')

K(4,4)=K(4,4)+Kb;
K(13,13)=Kb;
K(13,4)=-Kb;
K(4,13)=-Kb;
K(6,6)=K(6,6)+Ka;
K(14,14)=Ka;
K(14,6)=-Ka;
K(6,14)=-Ka;
K(8,8)=K(8,8)+Kc;
K(15,15)=Kc;
K(15,8)=-Kc;
K(8,15)=-Kc;

M(13,13)=Mb;
M(14,14)=Ma;
M(15,15)=Mc;

C=0.1*K+0.1*M;

ap=[zeros(15) eye(15);-inv(M)*K -inv(M)*C];
av=[zeros(2) eye(2);-inv(m)*k -inv(m)*c];
aa=[av zeros(4,30);zeros(30,4) ap];
tspan=[0 tfs];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[tt,yy]=ode23s('equacao_ptres',tspan,y0);
nn=length(tt);
xx1=yy(1:nn,1);
xx2=yy(1:nn,2);
vv1=yy(1:nn,3);
vv2=yy(1:nn,4);

```

```

ux2=yy(1:nn,5);
ux3=yy(1:nn,6);
ux4=yy(1:nn,7);
ux5=yy(1:nn,8);
ux6=yy(1:nn,9);
ux7=yy(1:nn,10);
ux8=yy(1:nn,11);
ux9=yy(1:nn,12);
ux10=yy(1:nn,13);
ux11=yy(1:nn,14);
ux12=yy(1:nn,15);
ux14=yy(1:nn,16);
ub=yy(1:nn,17);
ua=yy(1:nn,18);
uc=yy(1:nn,19);

```

```

figure(3)
plot(t,u7, tt,ux7, tt,ua,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
title('deslocamento da ponte com e sem o absorvedor passivo')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend('sem absorvedor','com absorvedor','absorvedor')

```

```

figure(4)
plot(tt,ux7,tt,ua,tpi,0,'r*',tpf,0,'r*')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamentos')
legend('ponte','absorvedor')

```

```

function yp=equacao_ptres(tt,yy)
global L v aa D m1 m2 g m M Kp

```

```

tt
F2=0;
F3=0;
F4=0;
F5=0;
F6=0;
F7=0;
F8=0;
F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;
Fa = 0;
Fb = 0;
Fc = 0;
N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;

u=0;
Ftr=0;

```

```

t1=D/v;
t2=(D+L)/v;
t3=(D+L*2)/v;
t4=(D+L*3)/v;
t5=(D+L*4)/v;
t6=(D+L*5)/v;
t7=(D+L*6)/v;

if tt < t1
else

if tt<t2;
    dd=(tt-t1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*yy(5)+N3*yy(6)+N4*yy(7);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F3=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t3;
    dd=(tt-t2)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(6)+N2*yy(7)+N3*yy(8)+N4*yy(9);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F3=(L-dd)/L)*Ftr;
    F5=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t4;
    dd=(tt-t3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(8)+N2*yy(9)+N3*yy(10)+N4*yy(11);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F5=(L-dd)/L)*Ftr;
    F7=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t5;
    dd=(tt-t4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(10)+N2*yy(11)+N3*yy(12)+N4*yy(13);
    Ftr=Kp*(yy(2)-u);
    F7=(L-dd)/L)*Ftr;
    F9=(dd/L)*Ftr;
else

if tt<t6;
    dd=(tt-t5)*v;

```

```

N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(12)+N2*yy(13)+N3*yy(14)+N4*yy(15);
Ftr=Kp*(yy(2)-u);
F9=(L-dd)/L)*Ftr;
F11=(dd/L)*Ftr;
else
if tt<t7;
dd=(tt-t6)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(14)+N2*yy(15)+N4*yy(16);
Ftr=Kp*(yy(2)-u);
F11=(L-dd)/L)*Ftr;
else
end
end
end
end
end
end
end

F=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14;Fb;Fa;Fc];
Fcc=inv(m)*[-m1*g;-m2*g+Kp*u];
bc=[0;0;Fcc];
Fp=inv(M)*F;
bp=[zeros(15,1);Fp];
Ft=[bc;bp];

yp=aa*yy+Ft;

```

APÊNDICE IX: Rotina para solução do modelo da ponte com 1/2 de carro e implementação de três absorvedores dinâmicos.

```

clear
close all
global L v a D m1 mp1 mp2 g m M Kp d1 d2 aa
L=10; %comprimento do vão da ponte
Lp=6*L; % comprimento total da ponte
m1=500; %massa de meio carro
mp1=7; %massa da roda dianteira
mp2=7;%massa da roda traseira
J=630; %momento de inercia
g=9.81; %aceleração da gravidade
K1=23000; %rigidez da mola dianteira
K2=17000; %rigidez da mola traseira
Kp=200000; %rigidez do pneu
c1=1600; %amortecimento dianteiro
c2=1600; %amortecimento traseiro
d1=0.996; %distancia do CG a roda dianteira
d2=1.495; %distancia do CG a roda traseira

E=200e9;
I=8e-3;
ro=7850;
A=0.48;

uest = -(m1+mp1+mp2)*g/(48*E*I/Lp^3);

Ma=1500; %Massa do peso do absorvedor
Ka=6000; %Rigidez da mola do absorvedor;
Mb=Ma;
Kb=Ka;
Mc=Ma;
Kc=Ka;

v=22.22; %velocidade do carro 80Km/h=22.22

D=60; %distancia da roda dianteira a ponte
tpi1=(D/v); %tempo da roda dianteira ate a ponte
tpi2=(D+d1+d2)/v; %tempo da roda traseira ate a ponte
tpf1=(D+6*L)/v; %tempo de saida da roda dianteira da ponte
tpf2=((D+d1+d2)+(6*L))/v; %tempo de saida da roda traseira da ponte

K=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
-6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0
0 0 0;
2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0
0 0 0;
0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0
0 0 0;
0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0
0 0 0;
0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L
0 0 0;
0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L
0 0 0;

```

```

-12    6*L    0;      0    0    0    0    0    -12   -6*L   24    0
-6*L    2*L*L  0;      0    0    0    0    0    6*L   2*L*L  0    8*L*L
24    0    6*L;      0    0    0    0    0    0    0    -12  -6*L
0    8*L*L  2*L*L;    0    0    0    0    0    0    0    6*L   2*L*L
6*L    2*L*L  4*L*L]; 0    0    0    0    0    0    0    0    0

```

```

M=(ro*A*L/420)*[4*L*L  13*L -3*L*L    0    0    0    0    0
0    0    0    0;
0    0    0    13*L  312    0    54  -13*L    0    0    0
0    0    0    -3*L*L  0    8*L*L  13*L -3*L*L    0    0    0
0    0    0    0;
0    0    0    0    54  13*L  312    0    54  -13*L    0
0    0    0    0;
0    0    0    0  -13*L -3*L*L    0    8*L*L  13*L -3*L*L    0
0    0    0    0;
13*L    0    0    0;
3*L*L    0    0    0;
0    54  -13*L  0;
8*L*L    13*L  -3*L*L  0;
13*L    312    0  -13*L;
-3*L*L    0    8*L*L -3*L*L;
0    -13*L -3*L*L  4*L*L];

```

C=0.1*K+0.1*M;

m=[m1 0 0 0; 0 J 0 0; 0 0 mp1 0; 0 0 0 mp2];

```

k=[ (K1+K2)          ((K1*d1) - (K2*d2))          (-K1)          (-
K2) ;
  ((K1*d1) - (K2*d2))  ((K1*(d1*d1)) + (K2*(d2*d2)))  (-K1)*d1
(K2)*d2;
  (-K1)              (-K1)*d1              (K1+Kp)          0;
  (-K2)              (K2)*d2              0
(K2+Kp) ];

```

```

c=[ (c1+c2)          ((c1*d1) - (c2*d2))          -c1          -
c2;
  ((c1*d1) - (c2*d2))  ((c1*(d1*d1)) + (c2*(d2*d2)))  (-c1*d1)
(c2*d2);
  -c1              (-c1*d1)              c1
0;
  -c2              (c2*d2)              0
c2];

```

ap=[zeros(12) eye(12); -inv(M)*K -inv(M)*C];

```

av=[zeros(4) eye(4);-inv(m)*k -inv(m)*c];
a=[av zeros(8,24);zeros(24,8) ap];
tspan=[0 5*tpf2];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[t,y]=ode23s('equacao_pmc',tspan,y0);
n=length(t);

```

```

x1=y(1:n,1);
teta=y(1:n,2);
xp1=y(1:n,3);
xp2=y(1:n,4);
v1=y(1:n,5);
w=y(1:n,6);
vp1=y(1:n,7);
vp2=y(1:n,8);
u2=y(1:n,9);
u3=y(1:n,10);
u4=y(1:n,11);
u5=y(1:n,12);
u6=y(1:n,13);
u7=y(1:n,14);
u8=y(1:n,15);
u9=y(1:n,16);
u10=y(1:n,17);
u11=y(1:n,18);
u12=y(1:n,19);
u14=y(1:n,20);
up2=y(1:n,21);
up3=y(1:n,22);
up4=y(1:n,23);
up5=y(1:n,24);
up6=y(1:n,25);
up7=y(1:n,26);
up8=y(1:n,27);
up9=y(1:n,28);
up10=y(1:n,29);
up11=y(1:n,30);
up12=y(1:n,31);
up14=y(1:n,32);

```

```

figure(1)
plot(t,u7,tpi1,0,'r*',tpf2,0,'r*')
title('deslocamento nó central da ponte')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')

```

```

figure(2)
plot(t,x1,t,xp1,t,xp2,tpi1,0,'r*',tpf2,0,'r*')
title('deslocamento carro')
xlabel('tempo')
ylabel('deslocamento')
legend('carro','roda dianteira','roda traseira')

```

```

K(4,4)=K(4,4)+Kb;
K(13,13)=Kb;
K(13,4)=-Kb;
K(4,13)=-Kb;
K(6,6)=K(6,6)+Ka;
K(14,14)=Ka;

```



```

function yp=equacao_tamc(tt,yy)
global L v aa D m1 mp1 mp2 g m M Kp d1 d2

tt
F2=0;
F3=0;
F4=0;
F5=0;
F6=0;
F7=0;
F8=0;
F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;
Fa=0;
Fb=0;
Fc=0;
N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;

u=0;
Ftr=0;

t1=D/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 1
t2=(D+L)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 2
t3=(D+L*2)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 3
t4=(D+L*3)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 4
t5=(D+L*4)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 5
t6=(D+L*5)/v; %tempo para a roda dianteira entrar no vão 6
t7=(D+L*6)/v; %tempo para a roda dianteira sair da ponte

if (t1<tt)&&(tt<t2);
    dd=(tt-t1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*yy(9)+N3*yy(10)+N4*yy(11);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F2=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t2<tt)&&(tt<t3);
    dd=(tt-t2)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(10)+N2*yy(11)+N3*yy(12)+N4*yy(13);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F2=((L-dd)/L)*Ftr;
    F4=(dd/L)*Ftr;
else

```

```

end
if (t3<tt)&&(tt<t4);
    dd=(tt-t3)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(12)+N2*yy(13)+N3*yy(14)+N4*yy(15);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F4=((L-dd)/L)*Ftr;
    F6=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t4<tt)&&(tt<t5);
    dd=(tt-t4)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(14)+N2*yy(15)+N3*yy(16)+N4*yy(17);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F6=((L-dd)/L)*Ftr;
    F8=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t5<tt)&&(tt<t6);
    dd=(tt-t5)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(16)+N2*yy(17)+N3*yy(18)+N4*yy(19);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F8=((L-dd)/L)*Ftr;
    F10=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (t6<tt)&&(tt<t7);
    dd=(tt-t6)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*yy(18)+N2*yy(19)+N4*yy(20);
    Ftr=Kp*(yy(3)-u);
    F10=((L-dd)/L)*Ftr;
else
end

tt1=(D+d1+d2)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 1
tt2=((D+d1+d2)+L)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 2
tt3=((D+d1+d2)+L*2)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 3
tt4=((D+d1+d2)+L*3)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 4
tt5=((D+d1+d2)+L*4)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 5
tt6=((D+d1+d2)+L*5)/v; %tempo para a roda traseira entrar no vão 6
tt7=((D+d1+d2)+L*6)/v; %tempo para a roda traseira sair da ponte

if (tt1<tt)&&(tt<tt2);
    dd=(tt-tt1)*v;
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;

```

```

N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N2*yy(9)+N3*yy(10)+N4*yy(11);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F2=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt2<tt)&&(tt<tt3);
dd=(tt-tt2)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(10)+N2*yy(11)+N3*yy(12)+N4*yy(13);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F2=(L-dd)/L)*Ftr;
F4=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt3<tt)&&(tt<tt4);
dd=(tt-tt3)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(12)+N2*yy(13)+N3*yy(14)+N4*yy(15);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F4=(L-dd)/L)*Ftr;
F6=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt4<tt)&&(tt<tt5);
dd=(tt-tt4)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(14)+N2*yy(15)+N3*yy(16)+N4*yy(17);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F6=(L-dd)/L)*Ftr;
F8=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt5<tt)&&(tt<tt6);
dd=(tt-tt5)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*yy(16)+N2*yy(17)+N3*yy(18)+N4*yy(19);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F8=((L-dd)/L)*Ftr;
F10=(dd/L)*Ftr;
else
end
if (tt6<tt)&&(tt<tt7);
dd=(tt-tt6)*v;
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd-2*L*(dd/L)*(dd/L)+dd;
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);

```

```
u=N1*yy(18)+N2*yy(19)+N4*yy(20);
Ftr=Kp*(yy(4)-u);
F10=((L-dd)/L)*Ftr;
else
end

F=[F2;F3;F4;F5;F6;F7;F8;F9;F10;F11;F12;F14;Fb;Fa;Fc];
Fc=inv(m)*[-m1*g;0;-mp1*g+Kp*u;-mp2*g+Kp*u];
bc=[0;0;0;0;Fc];
Fp=inv(M)*F;
bp=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;Fp];
Ft=[bc;bp];

yp=aa*yy+Ft;
```